RESOLUCIÓN Y DISCUSIÓN DE UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA

Se pretende con este artículo, a través del uso del programa GEUP, poner de manifiesto la utilidad de las nuevas tecnologías informáticas aplicadas a la experimentación y resolución de problemas de Geometría Euclídea.

Como ejemplo veamos el siguiente problema:

*“**Sobre una circunferencia dada, hallar un punto cuya suma de distancias a dos rectas dadas sea mínima**”.*

La resolución presenta dificultad y decidimos experimentar para intentar encontrar un camino adecuado.

Trabajamos sobre el siguiente enunciado y con los datos que se irán expresando:

“Sobre la circunferencia de centro O (a; b) y radio r, hallar un punto cuya suma de distancias a las rectas y = 0 e y = m x sea mínima”.

Inicialmente vamos a situarnos en el caso que se indica en la figura **a)**, tomando como rectas dadas los ejes coordenados y con el centro de la circunferencia en una de las bisectrices del ángulo formado por las citadas rectas.

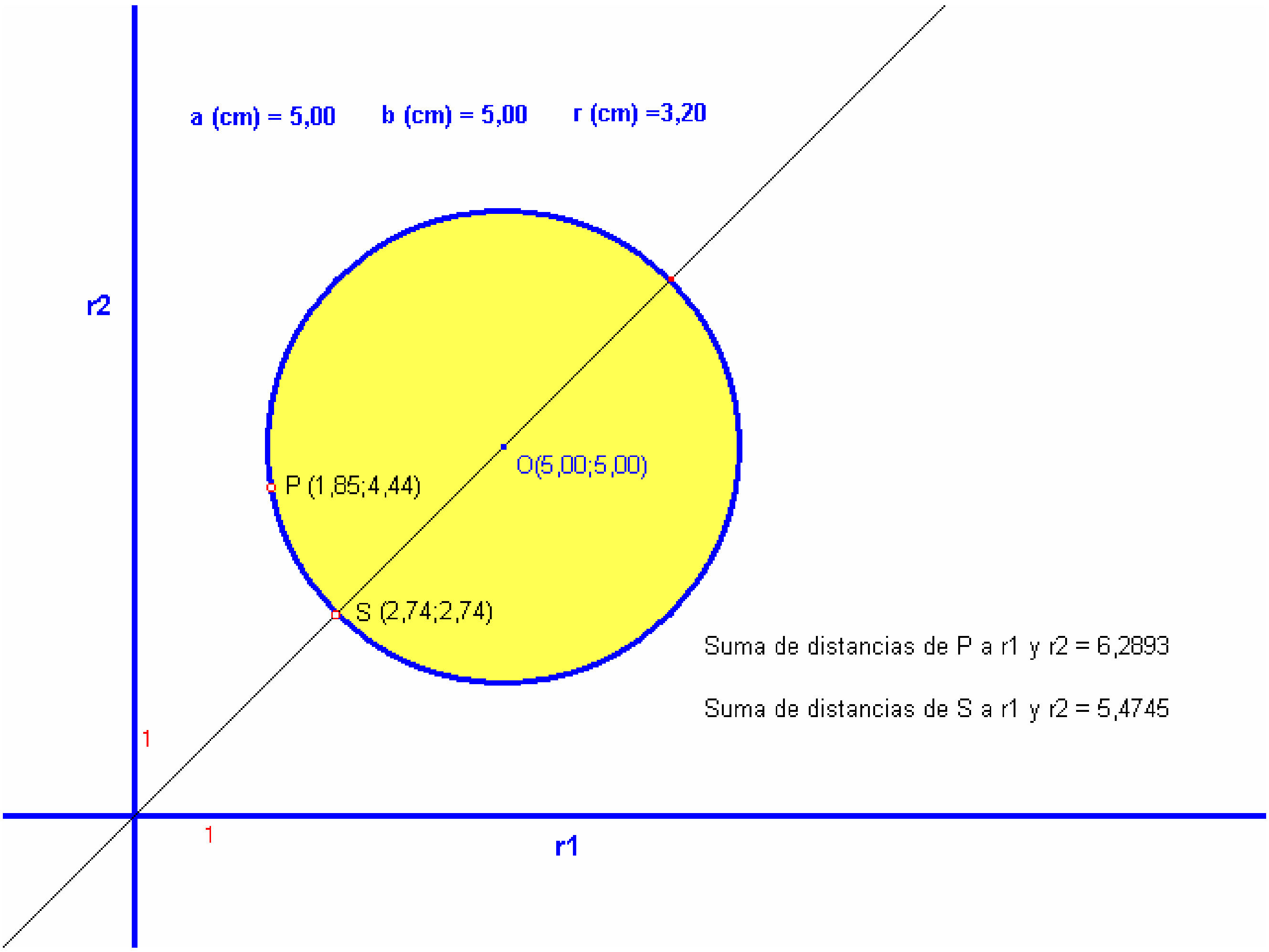


Figura **a)**

Sobre la circunferencia tomamos el punto variable P y expresamos el número que representa la suma de distancias a las rectas dadas. Al mover el punto P se observa que el menor valor de la citada suma, y que también se indica en la figura, corresponde (aproximadamente, teniendo en cuenta el procedimiento empleado) a la posición S del punto de corte con la bisectriz.

Veamos un caso más general cuyos datos se señalan en la figura **b)**:

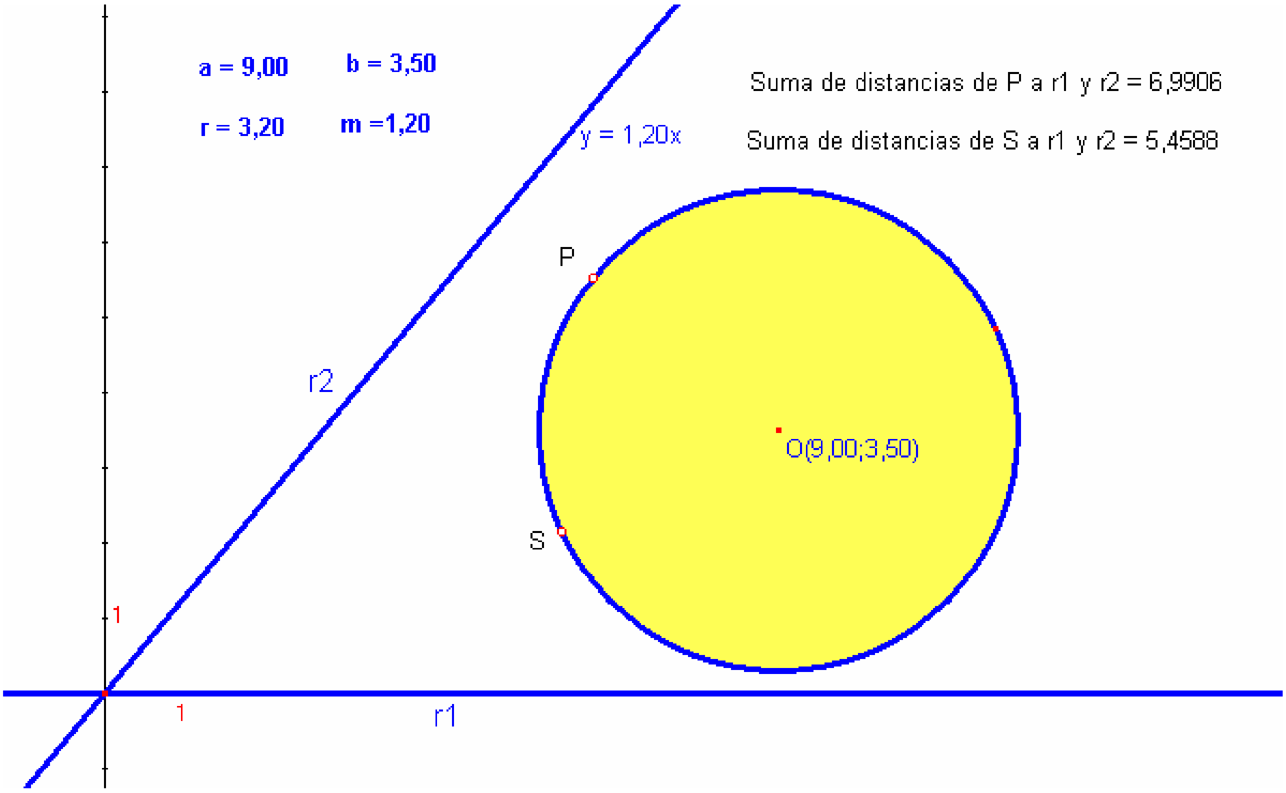


Figura **b)**

Sobre la circunferencia tomamos el punto variable P y expresamos el número que representa la suma de distancias a las rectas dadas. Al mover el punto P se observa que el menor valor de la citada suma, y que también se indica en la figura, corresponde (aproximadamente) a la posición del punto S.

En la figura **c),** siguiente, se pone de manifiesto que el punto S puede pertenecer a la recta que pasa por el centro de la circunferencia dada y es paralela a la bisectriz del ángulo formado por las rectas dadas r1 y r2.

Si esto fuese así:

La solución podría ser el punto de tangencia S de la recta perpendicular a la citada bisectriz.

Se construye el punto S y se confirma que el valor de la suma de distancias, de S a las rectas dadas r1 y r2, es el que aproximadamente se había estimado.

Se traza la tangente a la circunferencia por el punto S y se obtienen los puntos M´ y N´ por intersección de la citada tangente con las rectas dadas.

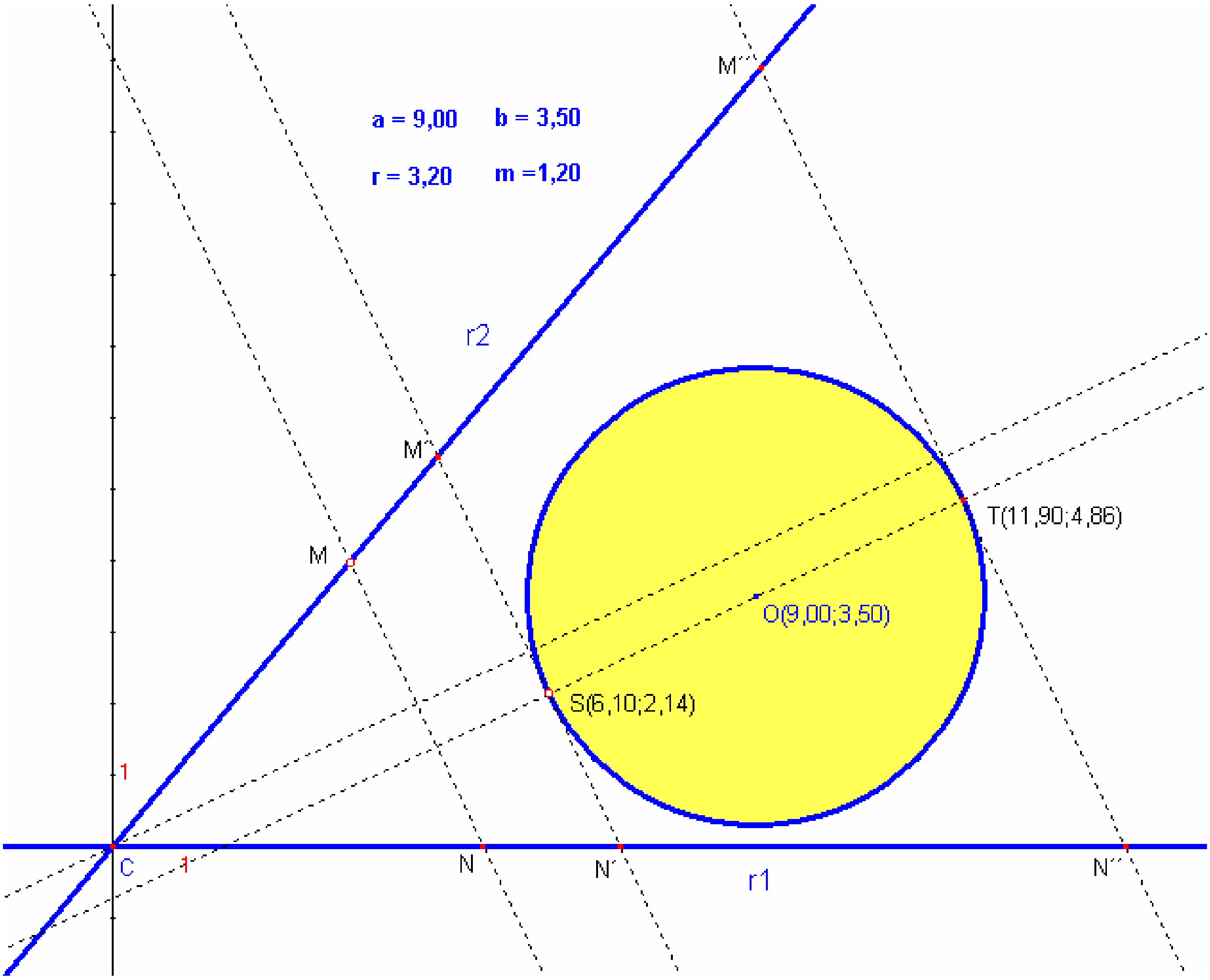
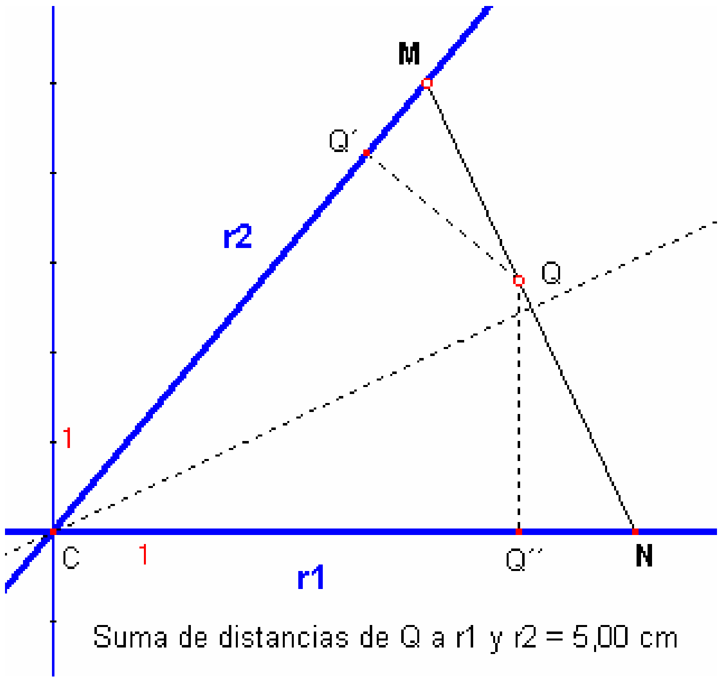


Figura **c)**

El triángulo N´CM´ será isósceles y los puntos del segmento M´N´ verifican que la suma de sus distancias a las rectas r1 y r2 es constante. (La citada suma, será igual a la altura correspondiente a cualquiera de los lados iguales del citado triángulo).



En general los puntos de cualquier segmento MN, intersecado entre las recta dadas por una perpendicular a la bisectriz del ángulo formado por las citadas rectas, gozarán de la propiedad indicada y la citada suma de distancias será menor o mayor según lo sea la longitud del segmento MN.

Vemos en la figura de la izquierda que:
Los triángulos QQ´M y QQ´´N son rectángulos y semejantes, en consecuencia: QQ´/ QM = QQ´´ / QN = (QQ´ + QQ´´) / MN ; luego para MN constante también lo será la suma de distancias (QQ´ + QQ´´) y cuanto menor o mayor sea MN así lo será

(QQ´+QQ´´). Lo cual se comprueba, con el programa, moviendo los puntos Q y M.

En virtud de lo expuesto, volviendo al ejemplo que se expresa en la figura **c)**, podemos afirmar que cualquier segmento MN de longitud menor a la del segmento M'N' no contendrá puntos de la circunferencia y los puntos de los segmentos MN de longitud mayor a M'N', que contienen puntos de la circunferencia, tendrán una suma de distancias a las rectas dadas mayor a la de los puntos del segmento M'N'. En consecuencia, la solución es la estimada.

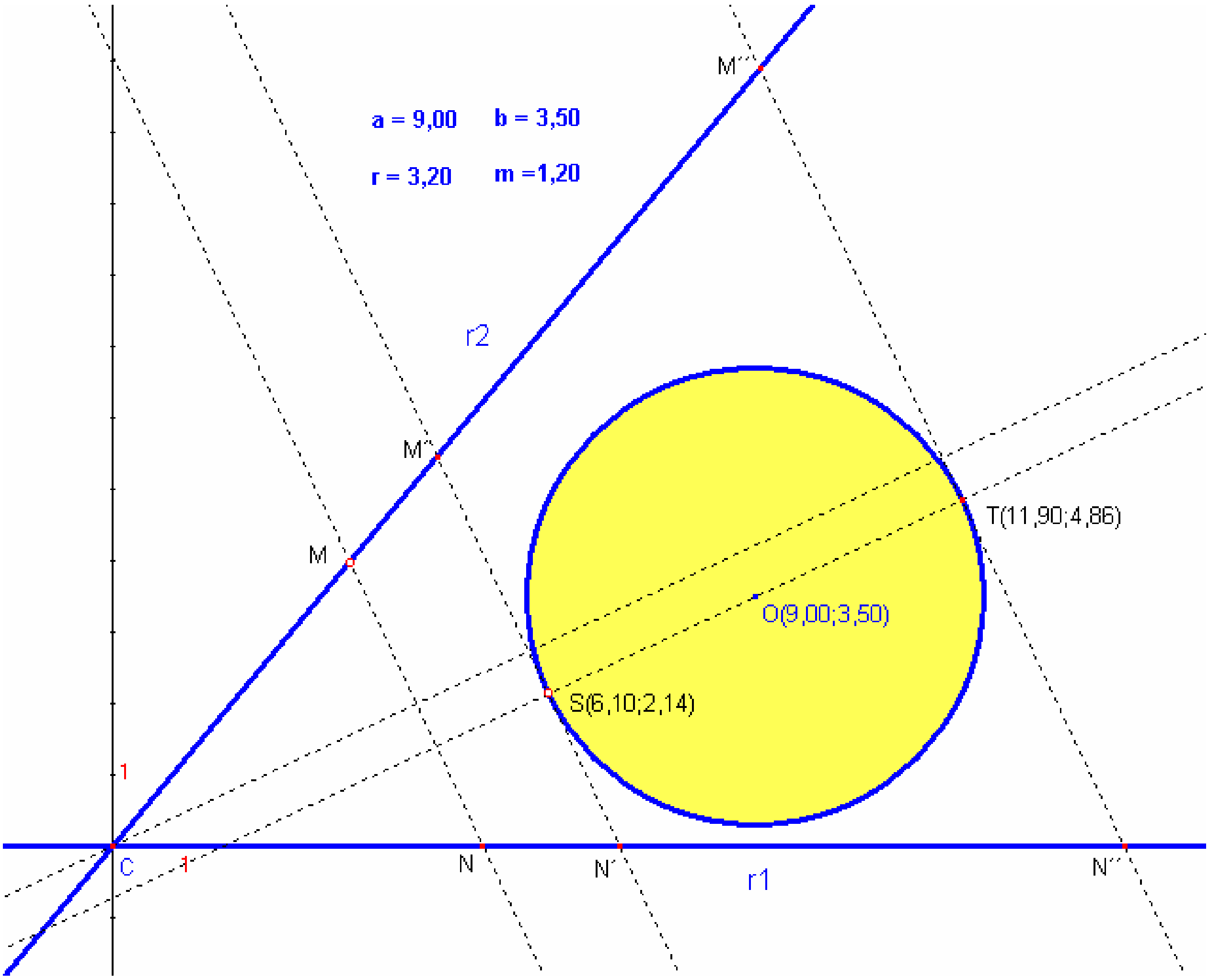


Figura **c)**

Con idéntico razonamiento quedaría resuelto el siguiente problema:

"**Sobre una circunferencia dada, hallar un punto cuya suma de distancias a dos rectas dadas sea máxima**".

La solución sería el punto T de tangencia, de la recta perpendicular a la citada bisectriz, más alejado del punto C de concurrencia de las rectas r1 y r2.

Los puntos M´´ y N´´ son los puntos de intersección de la tangente en el punto T con las rectas dadas.

Cualquier segmento MN de longitud mayor al segmento M´´N´´ no contendrá puntos de la circunferencia y los puntos de los segmentos MN de longitud menor a M´´N´´ que contienen puntos de la circunferencia tendrán una suma de distancias a las rectas dadas menor a la de los puntos del segmento M´´N´´. En consecuencia, la solución es la señalada.

Como comprobación es de interés la construcción que se indica en la siguiente figura **d)**:

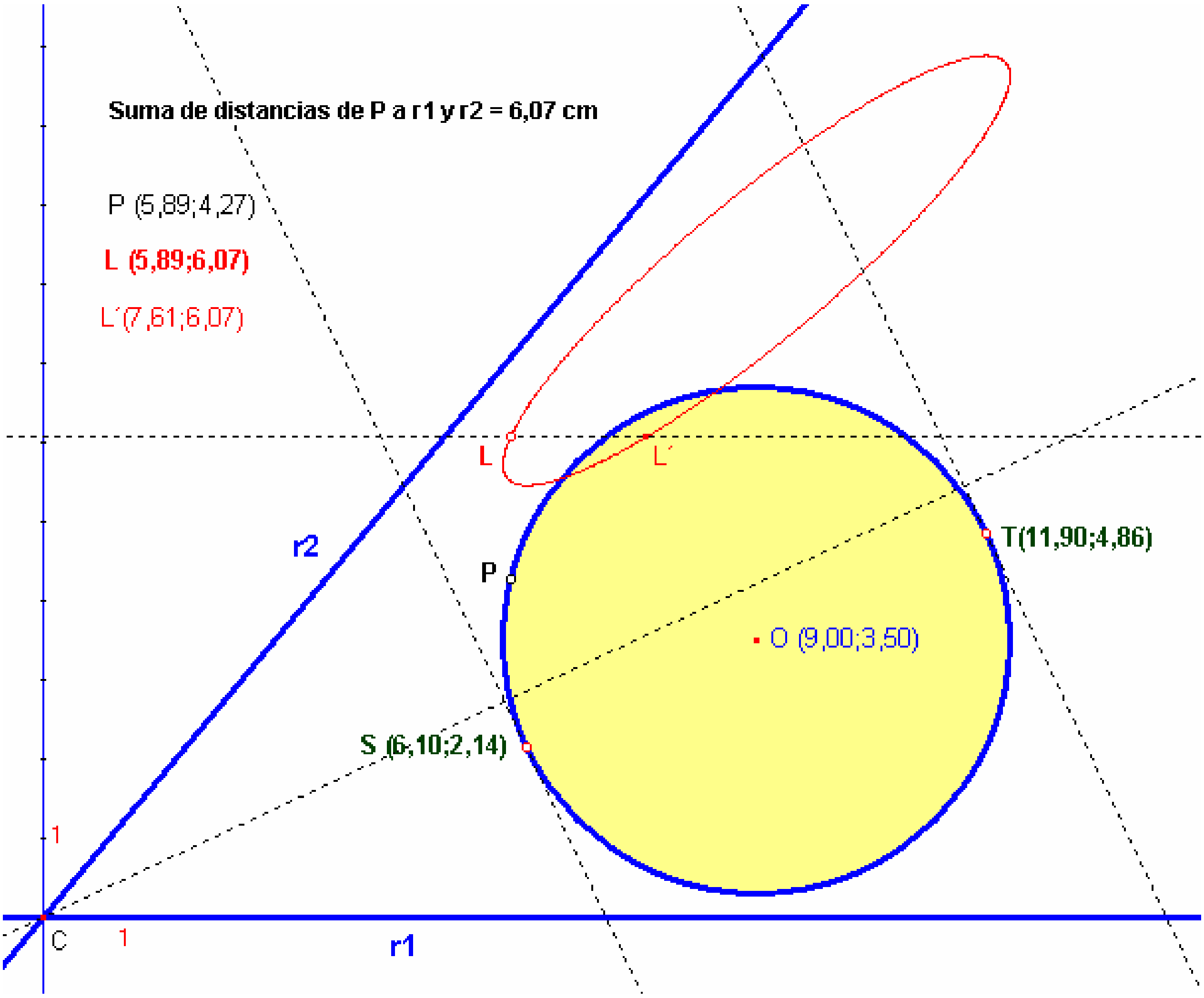


Figura **d)**

A partir del punto P, variable sobre la circunferencia dada de centro O, construimos el lugar geométrico de los puntos L de abscisa la del punto P y ordenada la suma de distancia de P a las rectas dadas r1 y r2. Se traza la paralela al eje de abscisas por el punto L la cual intersecta al lugar en el punto L´. Los extremos del lugar geométrico serán aquellos en que L coincida con L´ y se comprueba que el mínimo se produce cuando P coincide con el punto S y el máximo cuando P coincide con el punto T.

Pero **¿cómo se resolverá, el problema, en general? …**

Analizados muy diferentes casos, cuya exposición ocuparía mucho espacio, hemos llegado a la siguiente situación.

Recordando que: "**los puntos de un segmento MN, intersecado entre las rectas dadas por una perpendicular a la bisectriz del ángulo formado por las citadas rectas, gozan de la propiedad de que la suma de sus distancias a las rectas r1 y r2 es constante"**.

Podemos deducir con facilidad, tomando como referencia la figura **e)** siguiente, que:

“todos los puntos pertenecientes al perímetro de los rectángulos KLMN, cuyas diagonales son las rectas dadas, gozarán de la citada propiedad” y la suma de las distancias, de los citados puntos a las rectas dadas, será igual a la distancia de uno cualquiera de los vértices a la diagonal que no lo contiene.

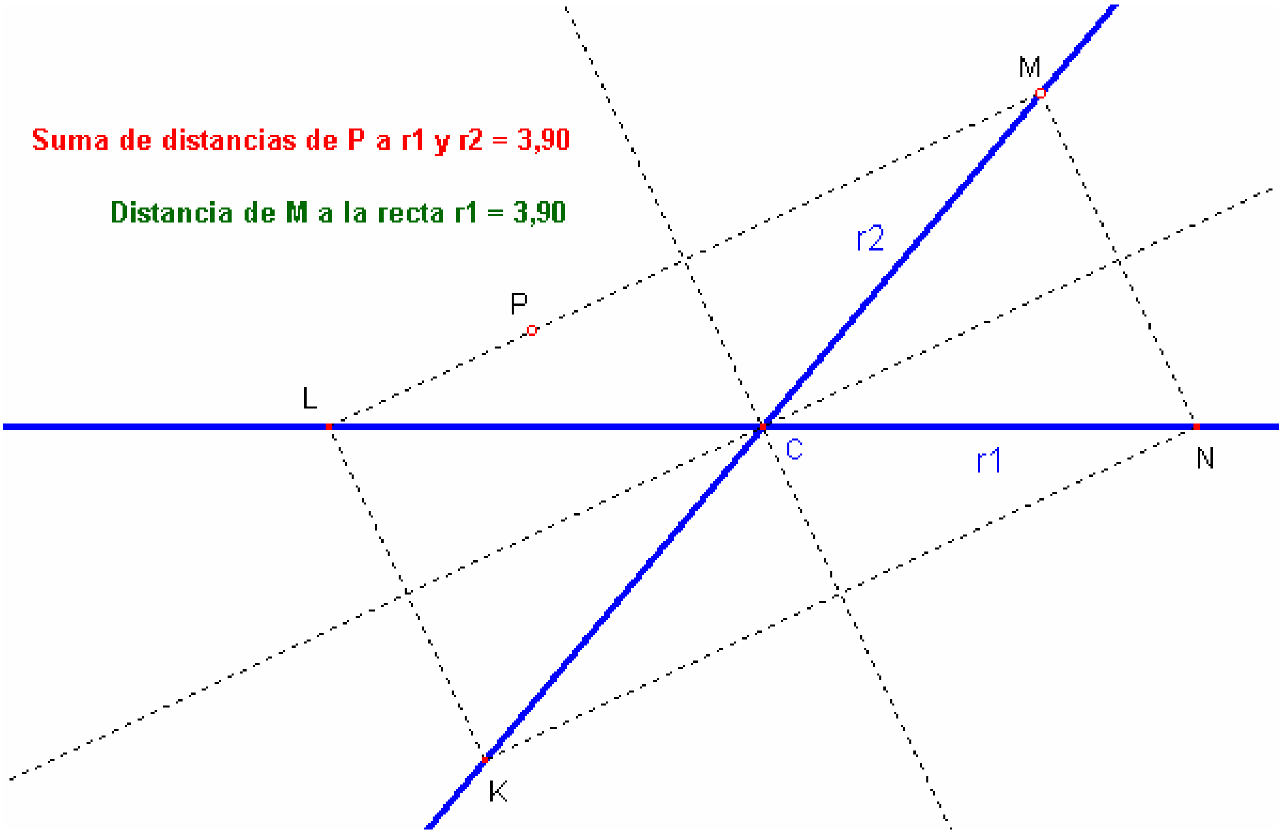


Figura **e)**

Como comprobación hacemos variar el punto P en el perímetro del rectángulo KLMN y vemos que la suma de distancias a r1 y r2 permanece constante.

(Los casos en que las rectas sean paralelas se analizarán más adelante).

En cada caso, la suma de las distancias de P a las rectas r1 y r2, será menor o mayor según lo sean las dimensiones de los rectángulos KLMN.

Como consecuencia de todo lo expuesto podemos expresar lo siguiente:

Serán soluciones aquellos puntos del menor o mayor perímetro del citado rectángulo, según queramos que la suma de distancias sea mínima o máxima, que pertenezcan a la circunferencia.

En cada uno de los casos se harán variar las dimensiones del rectángulo y se anticipará la posible solución o soluciones que, en el peor de los casos, será luego fácil de obtener.

Queremos destacar la gran ayuda que, en todo este proceso, presta el programa informático.

Veamos un ejemplo en la siguiente figura **f)** :

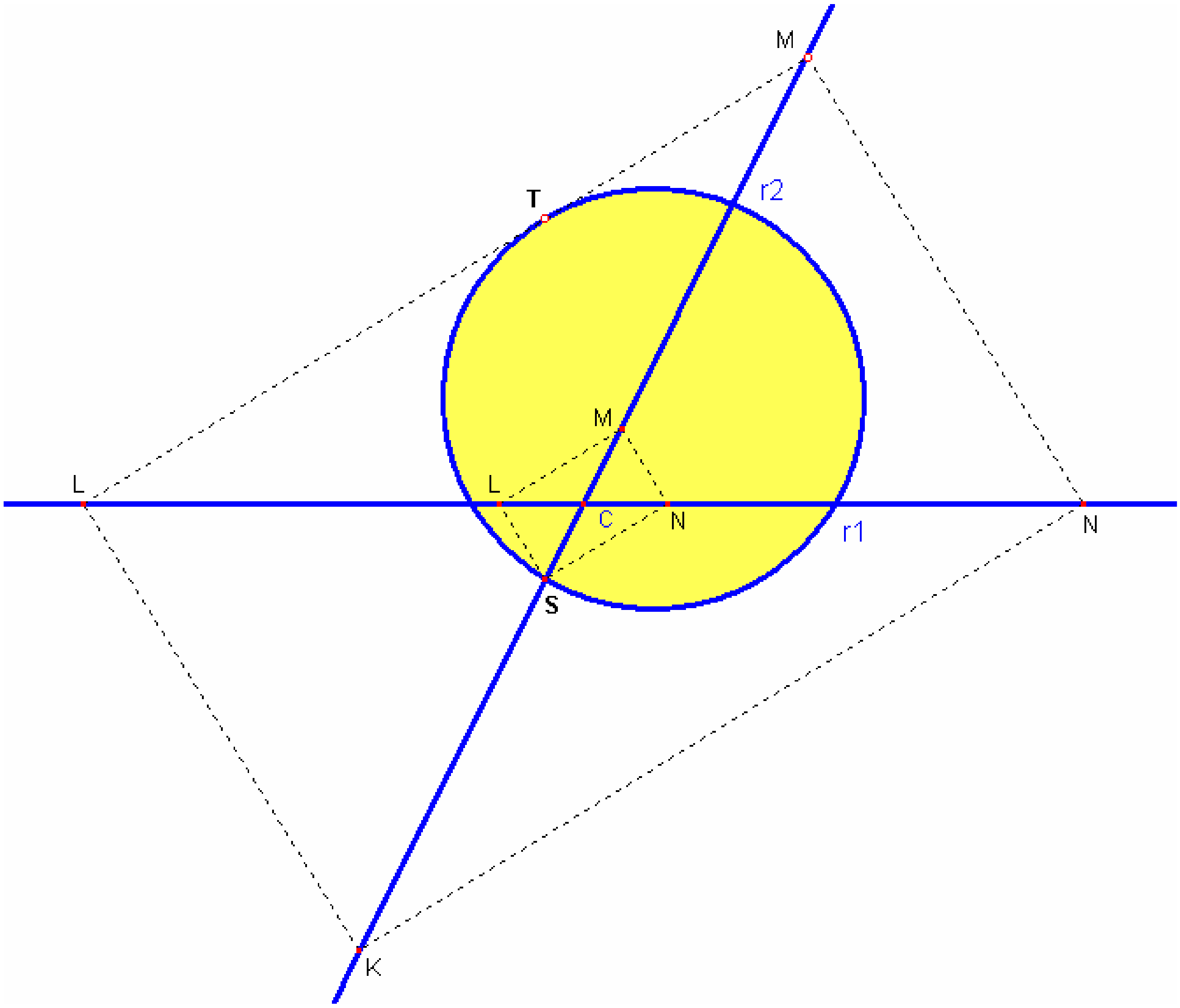


Figura **f)**

En este caso queda en evidencia que la solución para la suma de distancias mínima, será el punto S, intersección de la recta r2 con la circunferencia y coincidente con el vértice K del menor rectángulo que cumple las condiciones del problema y que la solución para la suma de distancias máxima será el punto T, de tangencia del lado LM del mayor rectángulo que cumple las condiciones del problema.

Para facilitar y abreviar la exposición de la discusión llamaremos:

Problema 1): Al enunciado *"Sobre una circunferencia dada, hallar un punto cuya suma de distancias a dos rectas dadas sea mínima".*

Problema 2): Al enunciado "Sobre una circunferencia dada, hallar un punto cuya suma de distancias a dos rectas dadas sea máxima".

Es necesario distinguir los casos en que el punto C de concurrencia de las rectas es interior, pertenece o es exterior a la circunferencia.

Caso **a)** El punto C es interior a la circunferencia.

Si el punto C coincide con el centro de la circunferencia:

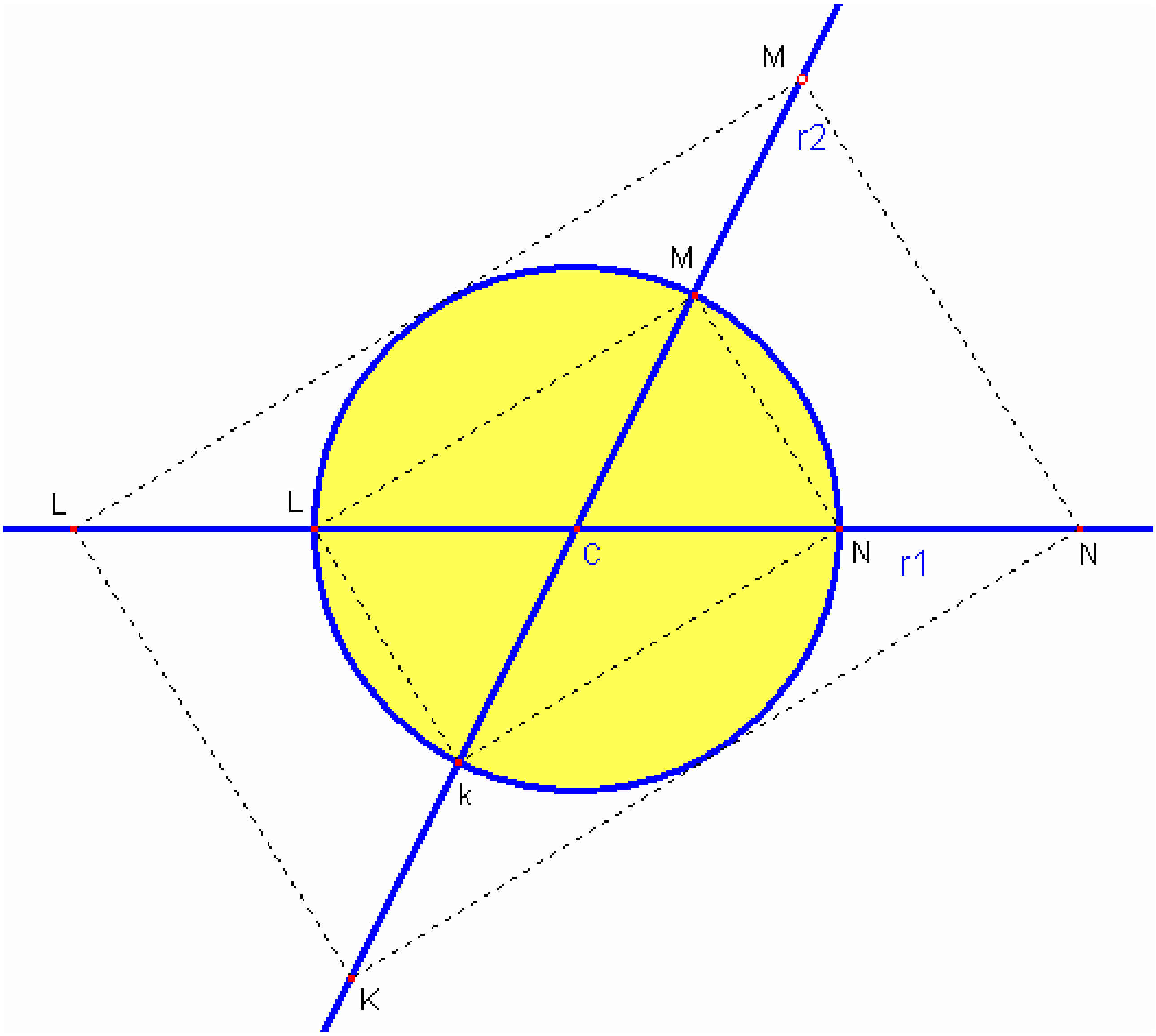


Figura **g)**

El problema 1) tiene cuatro soluciones: las intersecciones de las rectas dada r1 y r2 con la circunferencia.

El problema 2) tendrá dos soluciones: los puntos de tangencia de dos lados paralelos del rectángulo, a no ser que las rectas r1 y r2 sean perpendiculares en cuyo caso tendrá cuatro soluciones: los cuatro puntos de tangencia de los lados del cuadrado circunscrito.

Si el punto C no coincide con el centro de la circunferencia podrá haber:

Para el problema 1) tres, dos o una solución, y también

Para el problema 2) tres, dos o una solución.

Caso **b)** El punto C pertenece a la circunferencia.

Tal como se desprende de la figura **h)** siguiente:

El problema 1) tendrá una solución que será el propio punto C para el que la suma de distancias a las rectas será igual a cero.

El problema 2) podrá tener una solución que será el punto de tangencia de uno de los lados del rectángulo KLMN y si el centro de la circunferencia perteneciera a una de las bisectrices de r1 y r2 podrían existir, además, dos o tres soluciones.

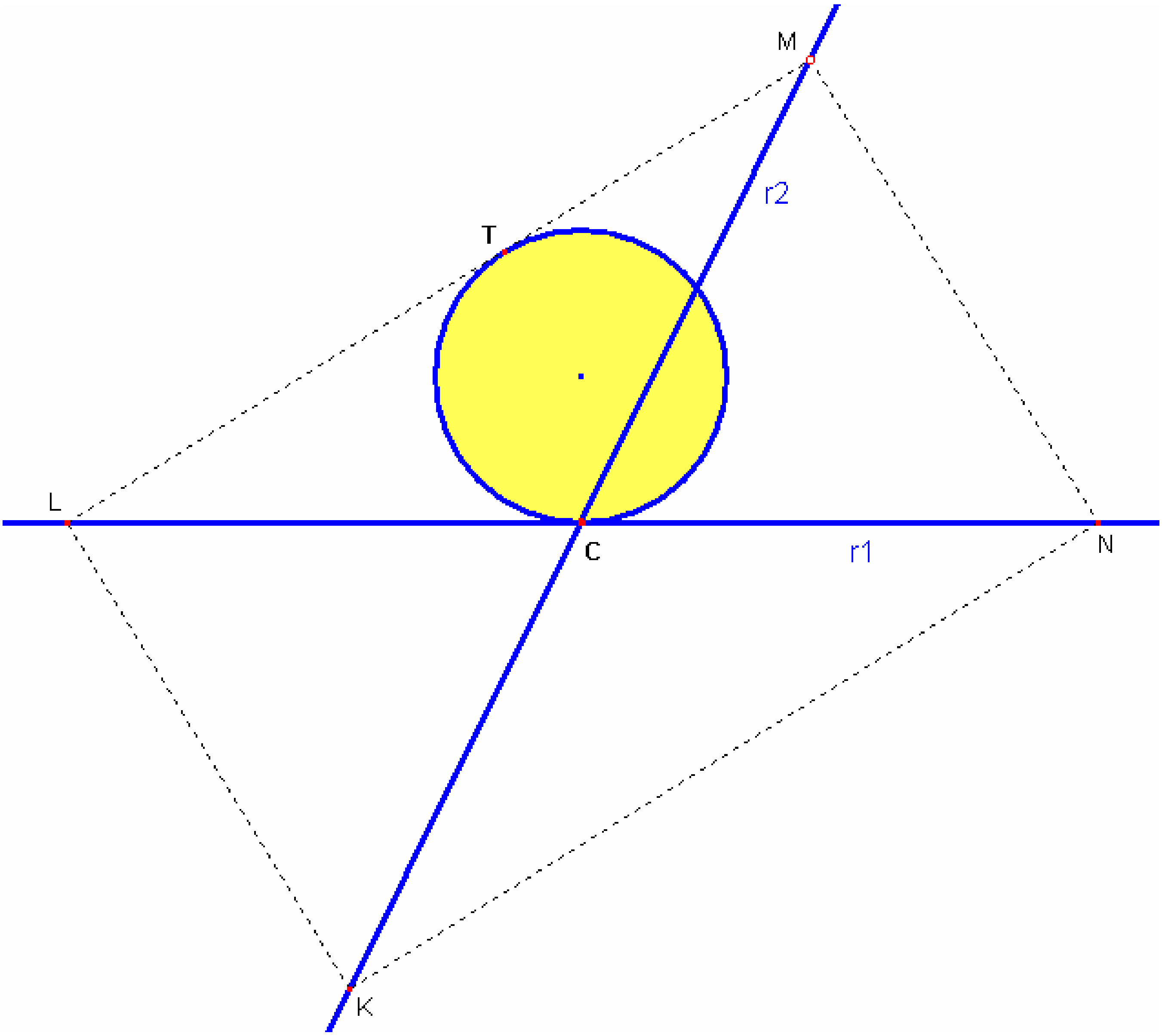


Figura **h)**

Caso **c)** El punto C es exterior a la circunferencia.

Analizando la siguiente figura **i):**

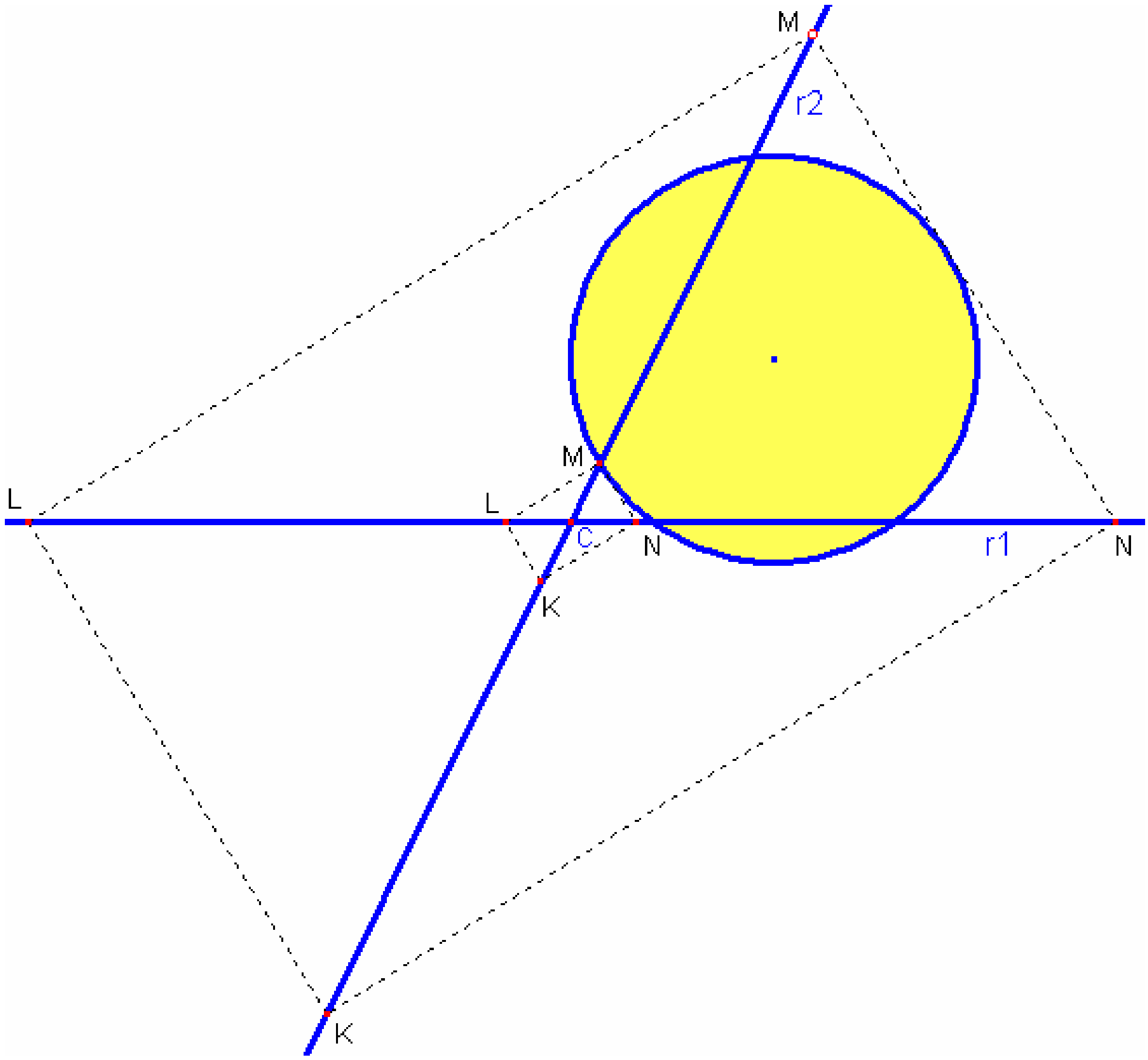


Figura **i)**

El problema 1) tendrá una solución que podrá ser un vértice o el punto de tangencia de uno de los lados del rectángulo.

El problema 2) tendrá una solución que será el punto de tangencia de uno de los lados del rectángulo KLMN. Si el punto C y el centro de la circunferencia pertenecen a alguna de las bisectrices podrán haber dos o tres soluciones en el caso de que, además, el centro equidiste de tres lados del rectángulo tal como se indica en la siguiente figura **j)**:

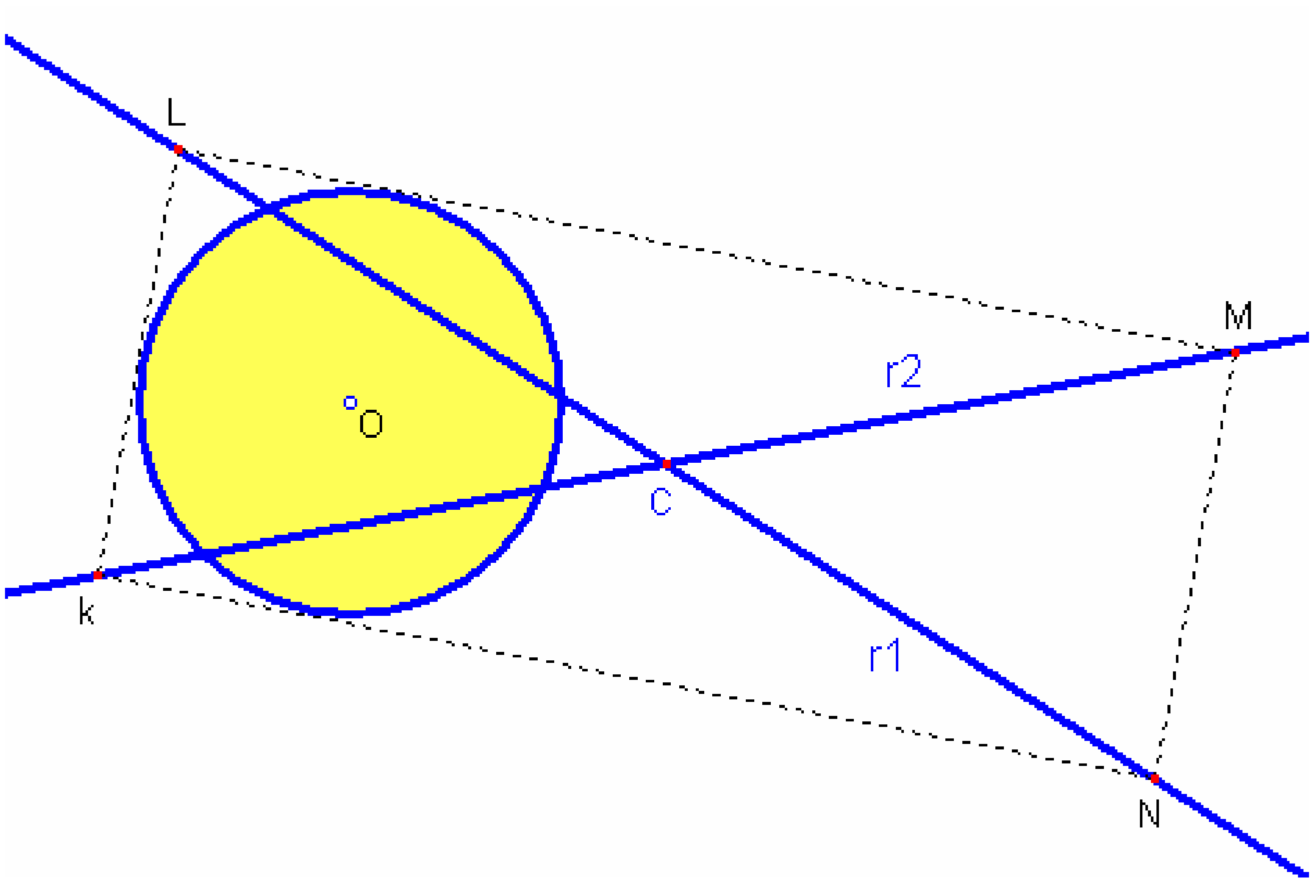
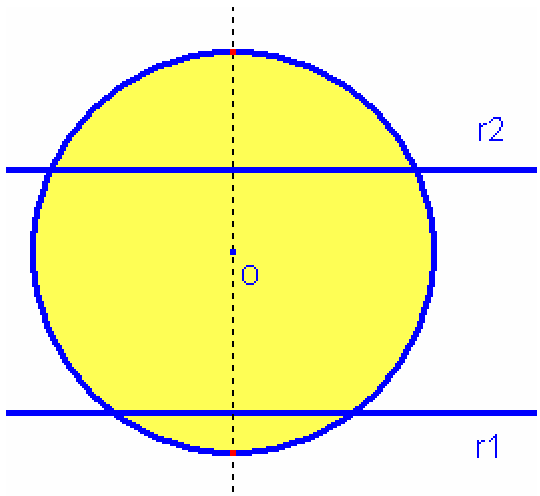


Figura **j)**

Finalizamos analizando los casos en que las rectas dadas sean paralelas.



La suma de distancias a r1 y r2 de cualquier punto que pertenezca a las rectas dadas, o se encuentre entre ellas, será igual a la distancia entre las rectas. Si el punto es exterior, la suma de distancias a r1 y r2 será igual a la distancia entre las rectas más el doble de su distancia a la recta más próxima; por tanto:

Si no hay puntos de la circunferencia entre las rectas.

El problema 1) tiene una solución: el punto más próximo a las rectas.

El problema 2) tiene una solución: el punto más alejado de las rectas.

Si hay puntos de la circunferencia entre las rectas.

El problema 1) tiene infinitas soluciones: todos sus puntos comprendidos entre las rectas o pertenecientes a alguna de ellas.

El problema 2) podrá tener una solución: el punto no comprendido entre las rectas que esté más alejado o dos soluciones en el caso de que el centro de la circunferencia equidistase de las rectas. Si todos los puntos de la circunferencia estuviesen comprendidos entre las rectas habría, también, infinitas soluciones.

(Se adjuntan los problemas números 90, 91 y 92 tomados de la colección de problemas resueltos de GEUP)

Ramón Álvarez Braun