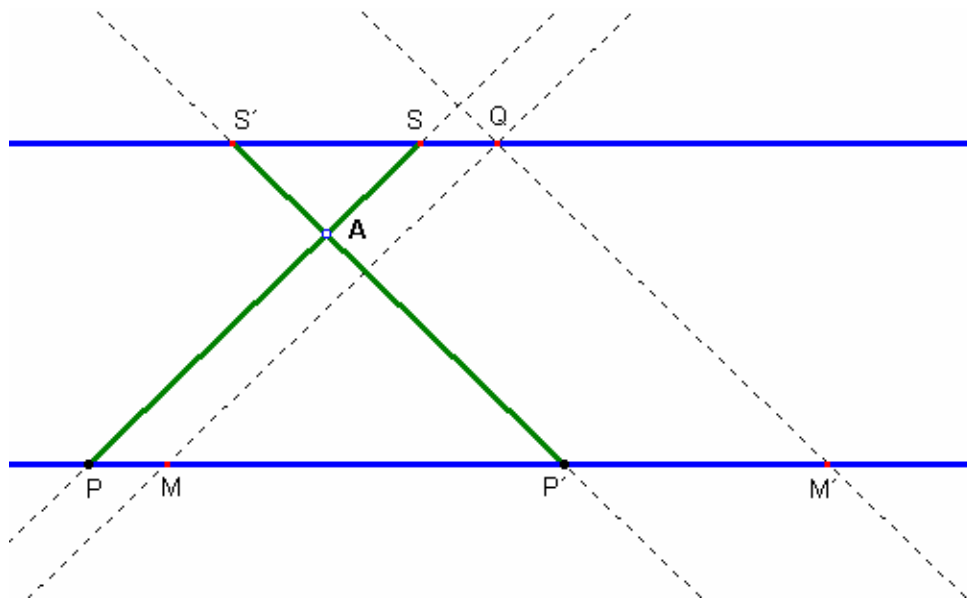


COMENTARIO A LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA

Hace algunos meses encontré, en un viejo libro de geometría, el siguiente problema:

Dadas dos rectas paralelas, trazar por un punto dado una secante tal, que la parte comprendida por dichas paralelas sea igual a una magnitud determinada, k .

El problema no ofrecía excesiva dificultad:

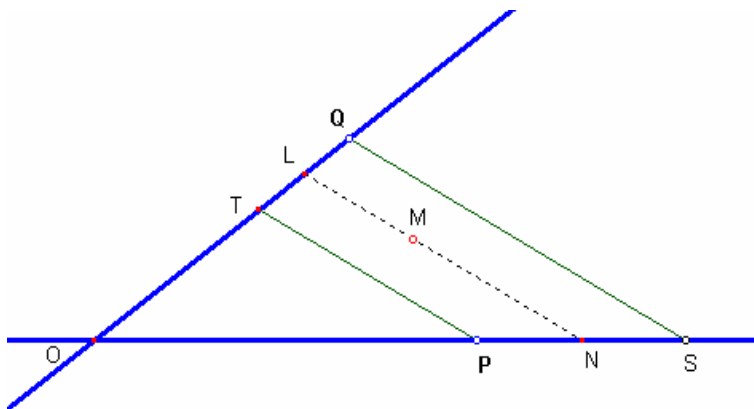


Haciendo centro en un punto Q cualquiera de una de las rectas dadas, con radio k se describe un arco de circunferencia que cortará a la otra recta en dos puntos M y M'. Se trazan después, por el punto A dado, paralelas a las rectas que unen el centro Q del arco con los puntos determinados M y M' y se tendrán las soluciones al problema. Puede haber dos, una o ninguna solución.

Pero **¿cómo se resolvería, en general, si las rectas no son paralelas?**... Después de muchas horas intentando resolverlo gráficamente, sin ninguna esperanza, decidí dejarlo dormir hasta mejor momento.

Algún tiempo después tropiezo con el siguiente problema:

Dadas dos rectas y un punto en cada una de ellas, trazar por éstos dos secantes paralelas tales, que la suma de los segmentos interceptados por las rectas sea igual a una magnitud conocida, k .



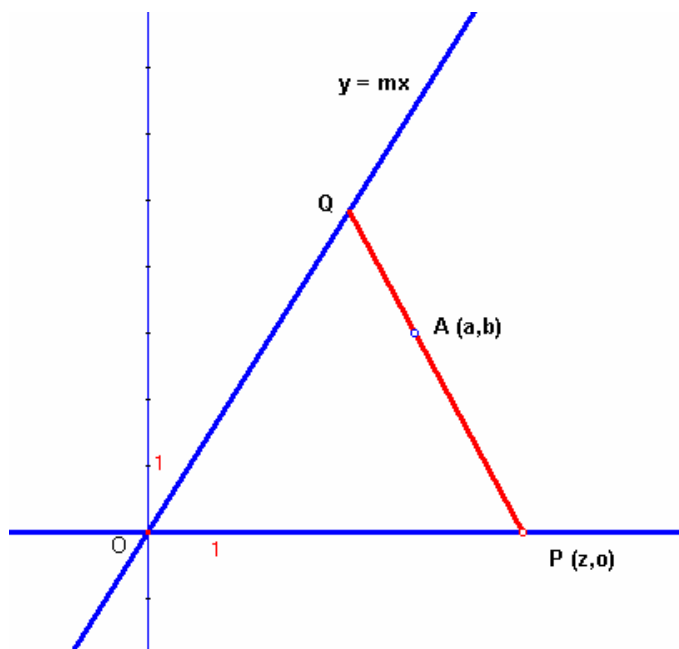
Veamos el siguiente camino para su posible solución:

Las rectas dadas y los segmentos de las secantes pedidas PT y QS formarán un trapecio, siendo una de las diagonales la recta que une los puntos P y Q dados. La paralela o base media del trapecio será de longitud $LN = k/2$, y pasará por el punto medio M de dicha diagonal.

Este camino me llevaba al problema que había dejado dormido y decidí retomarlo:

Después de nuevos intentos de resolución gráfica, sin ningún resultado, probé tratarlo analíticamente:

Una de las rectas dadas se hace coincidir con el eje OX y la otra recta será la de ecuación $y = mx$.



El punto dado se designa por A (a, b) y se toma P (z, o) en el eje OX, siendo Q el punto de intersección de la recta AP con la otra recta dada, de ecuación $y = mx$.

Se pretende calcular el valor de z, abcisa de P, tal que el segmento PQ sea igual a, la magnitud conocida, k.

Se llega a la siguiente ecuación:

$$z^2 [(t - b)^2 + (b.m)^2] = (k.t)^2$$

$$\text{Siendo } t = m (z - a) + b$$

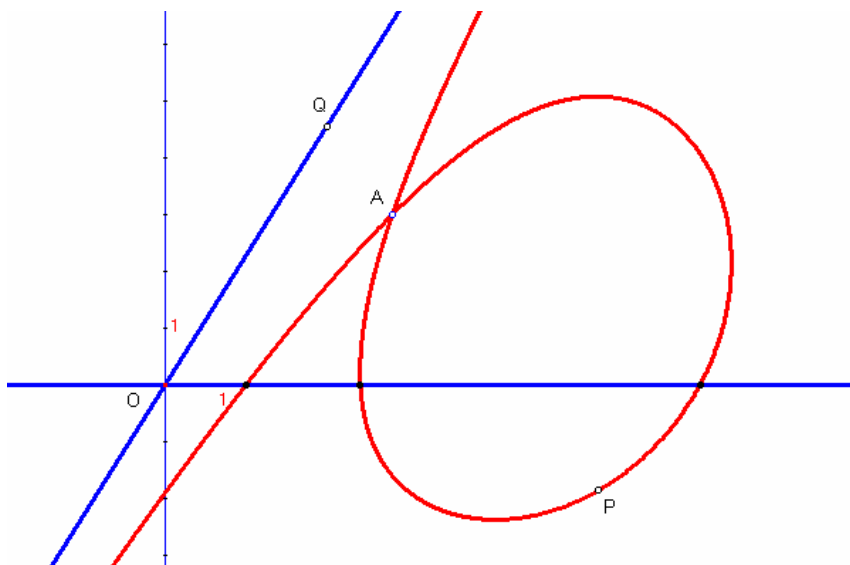
Es una ecuación de cuarto grado y, por tanto, el problema no es resoluble con regla y compás.

En el caso particular de que las rectas fuesen paralelas, tomando como ecuaciones $y = 0$ e $y = c$, se llegaría a la ecuación: $(z - a)^2 + b^2 = (b \cdot k / c)^2$

Y en el caso particular de que el punto A perteneciese a una de las rectas, tomando A en la recta $y = mx$, se llegaría a la ecuación: $(z - a)^2 + b^2 = k^2$

Ambas ecuaciones son de segundo grado y, por tanto, los citados casos particulares sí son resolubles con regla y compás, cosa que ya sabíamos.

Pero volvamos a nuestro problema general haciendo uso del programa GEUP 3.



Tomamos, en la recta $y = mx$, el punto variable Q y determinamos en la recta QA el punto P tal que $QP = k$.

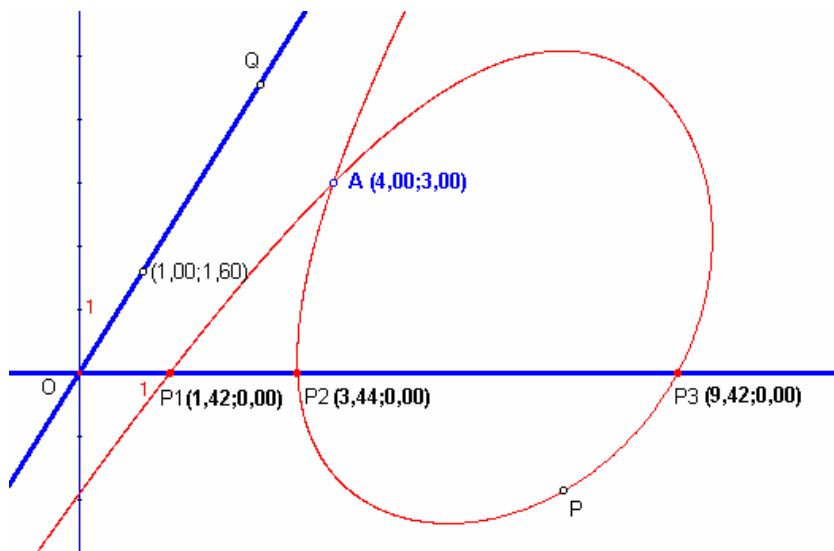
Construimos el lugar geométrico de P cuando Q varía sobre la recta $y = mx$; resultando la curva que aparece en la figura: la conoide de Nicomedes.

Es de interés la siguiente noticia histórica tomada de Wikipedia:

Se sabe muy poco de la vida de Nicomedes, incluso para establecer el periodo en el que vivió hay que hacerlo con referencias indirectas. Se sabe que Nicomedes vivió en la época de Eratóstenes (276 a. C.-194 a. C.), ya que criticó el método empleado por éste para la duplicación del cubo. También se sabe que Apolonio de Perge (262 a. C.-190 a. C.) denominó a una curva de su creación como "hermana de la concoide", sugiriendo de esta manera que la denominaba así en honor a la curva que hizo famosa Nicomedes. Por ello, se piensa que Nicomedes vivió posteriormente a Eratóstenes, y con anterioridad a Apolonio de Perge.

Al igual que otros geómetras de la época, Nicomedes se dedicó a resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo (problemas que ahora sabemos imposibles de resolver con las herramientas de la geometría clásica). En sus investigaciones, Nicomedes creó la concoide de Nicomedes; un descubrimiento descrito en su famosa obra *Las líneas de la concoide*. Nicomedes descubrió tres tipos distintas de concoides, pero se desconoce lo que representaban. Pappus de Alejandría escribió: "Nicomedes triseccionó cualquier ángulo rectilíneo mediante las curvas concoides. Él descubrió sus características peculiares al describir cómo construirlas, ordenarlas y sus propiedades."

Nicomedes también empleó la cuadratriz de Hippias aplicándola al cálculo de la cuadratura del círculo, según Pappus de Alejandría: "Para la cuadratura del círculo, Dinostrato, Nicomedes y ciertas otras personas posteriores emplearon cierta curva que toma su nombre de su propiedad, por lo que se denomina generadora de cuadrados". Eutocio menciona que Nicomedes "se enorgullecía exageradamente por el descubrimiento de esta curva, contrastándola con el mecanismo de Eratóstenes para encontrar cualquier número de partes proporcionales, método al que objetaba formalmente como impracticable y completamente ajeno al espíritu de la geometría."



Continuando con el problema:

Las intersecciones con OX del lugar geométrico construido nos darán las soluciones de z que, para los datos considerados y que se indican en la figura adjunta, son las siguientes:

$$z_1 = 1,4219$$

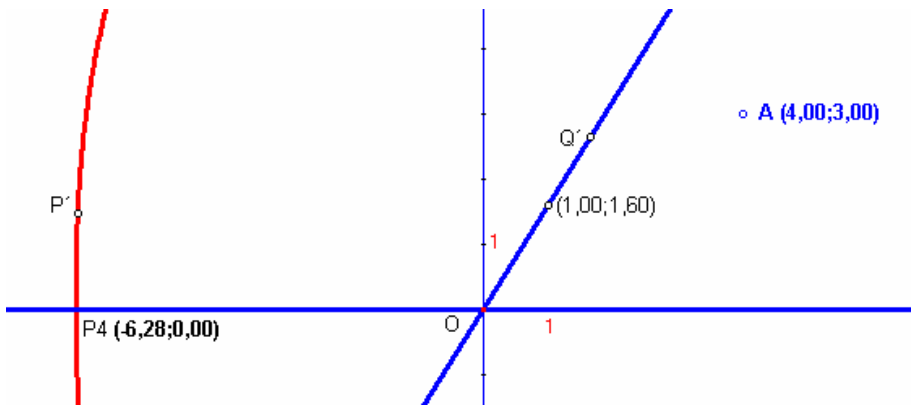
$$z_2 = 3,4361$$

$$z_3 = 9,4207$$

Se comprueba que las citadas soluciones satisfacen la ecuación:

$$z^2 [(t - b)^2 + (b.m)^2] = (k.t)^2$$

$$\text{Siendo } t = m(z - a) + b$$



La cuarta solución se encuentra construyendo la otra rama de la conoide de Nicomedes para lo cual tomamos un punto Q' sobre $y = mx$, determinando el punto P' del lugar con la dirección AQ' en lugar de la Q'A. La intersección con OX nos da un valor de z:

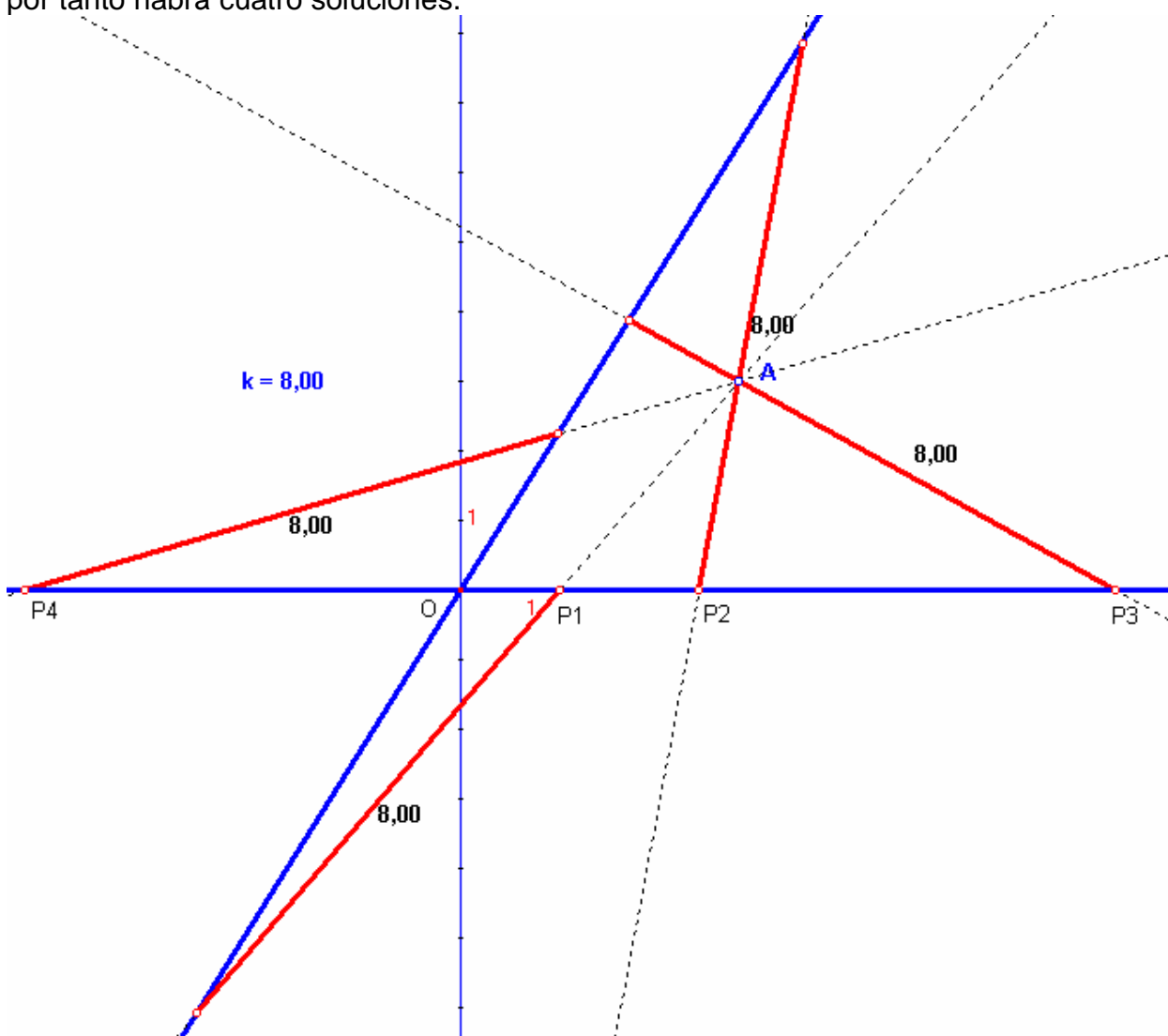
$$z_4 = -6,2787$$

comprobamos que también satisface la ecuación:

$$z^2 [(t - b)^2 + (b.m)^2] = (k.t)^2$$

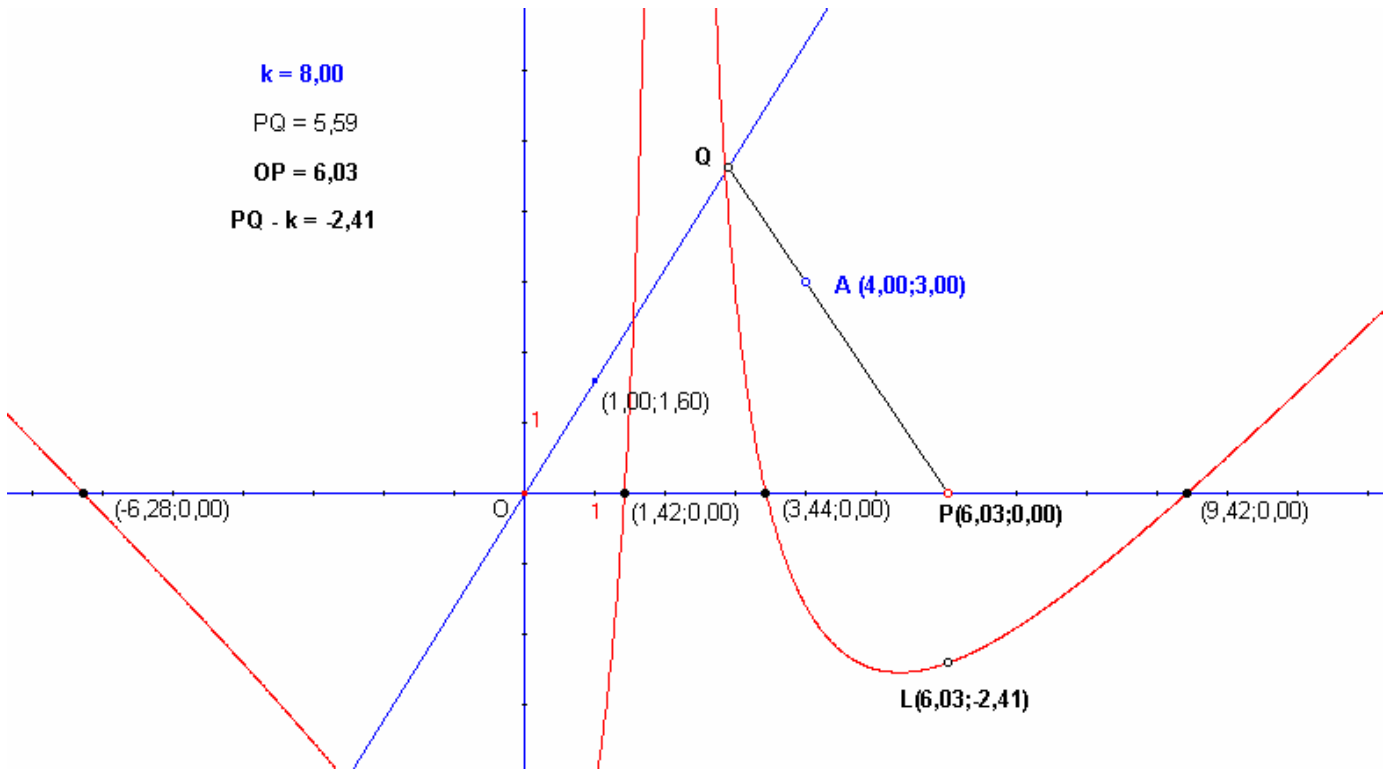
$$\text{Siendo } t = m(z - a) + b$$

Las secantes que solucionan el problema son las rectas que unen el punto A con los puntos P (z, 0) intersección del lugar geométrico con el eje OX que, en el caso tratado, son cuatro y por tanto habrá cuatro soluciones.



GEUP nos permite comprobar fácilmente que la magnitud del segmento comprendido entre las rectas dadas es igual a K .

Pero es de interés tratar otra manera de solucionar el problema, quizás más directa:



Veamos la resolución:

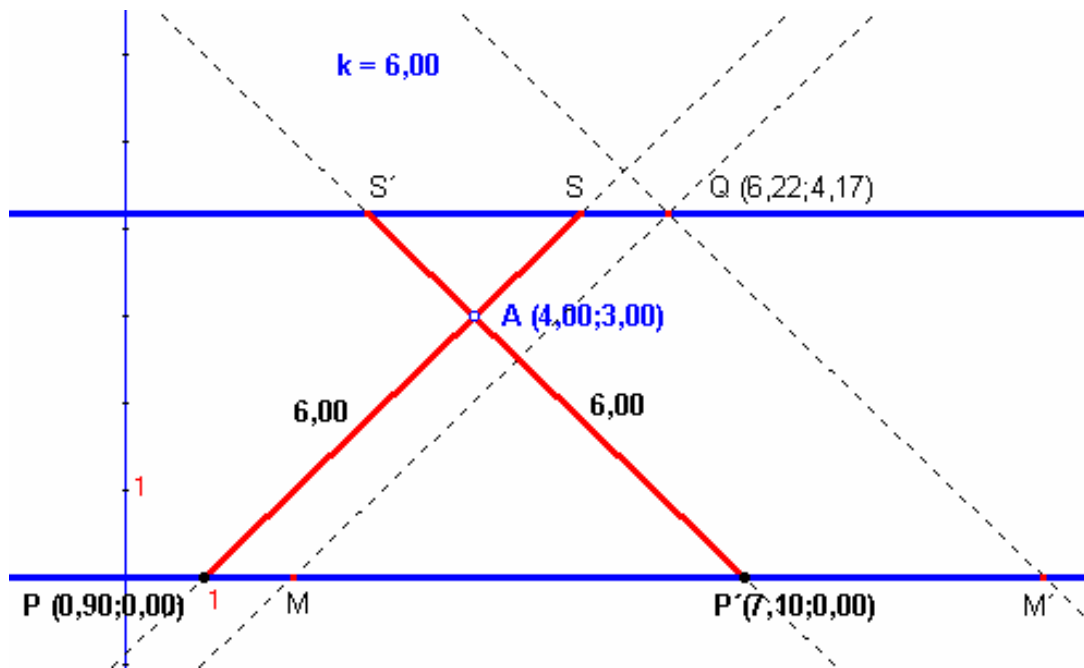
Tomamos el punto P variable en la recta OX y trazamos la recta AP , la cual intersecta a la otra recta dada en el punto Q .

Construimos el lugar geométrico de los puntos L que tienen como abscisa la del punto P y como ordenada la diferencia entre la magnitud del segmento PQ y el valor de K .

Se observa que los puntos de intersección con OX son iguales a los obtenidos con la resolución anterior y por tanto también lo serán las soluciones.

Continuamos tratando el caso particular que ha sido origen de este comentario.

“Dadas dos rectas paralelas, trazar por un punto dado una secante tal, que la parte comprendida por dichas paralelas sea igual a una magnitud determinada, k .”



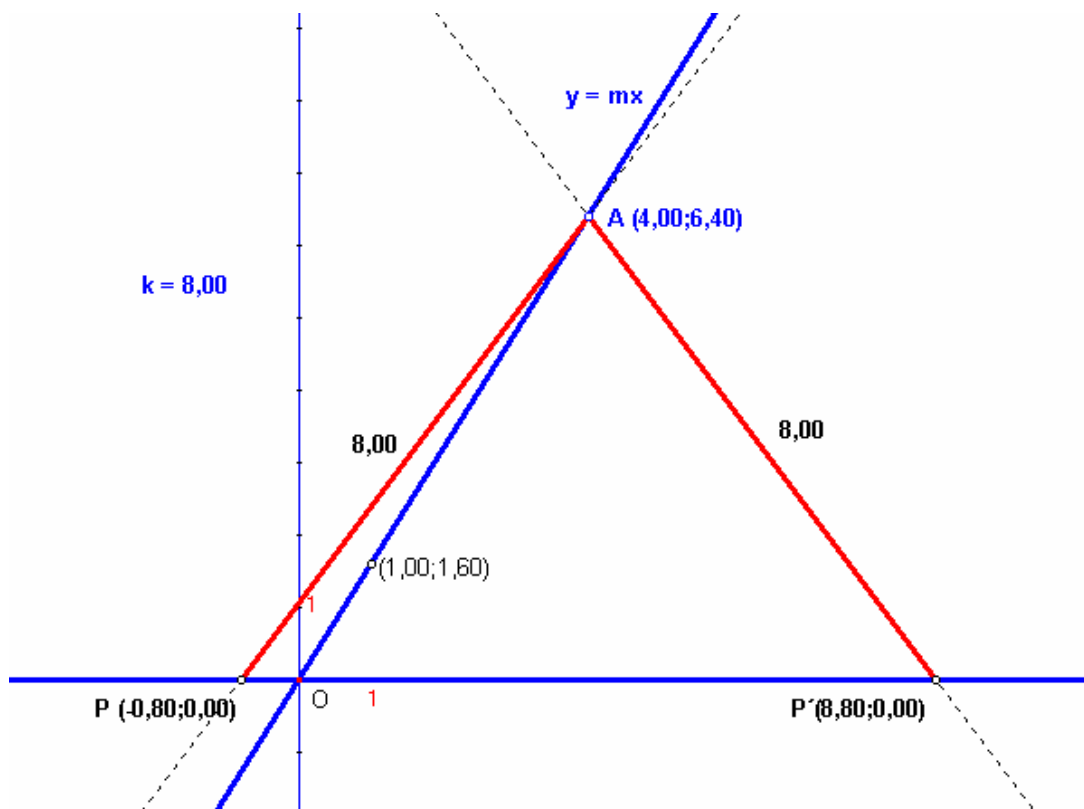
Las rectas consideradas son el eje OX y la que tiene por ecuación $y = c$ (Ordenada del punto Q), siendo el punto A (4, 00; 3,00).

Cualquier otra referencia se encuentra en la figura adjunta.

Se comprueba que las soluciones, las abscisas z de los puntos P y P', satisfacen la ecuación:

$$(z - a)^2 + b^2 = (b \cdot k / c)^2$$

Tratamos, a continuación, el caso particular de que el punto A perteneciese a una de las rectas, no paralelas, y tomamos A en la recta $y = mx$.



Las rectas son el eje OX y la de ecuación $y = mx$ siendo el punto A (4,00; 6,40).

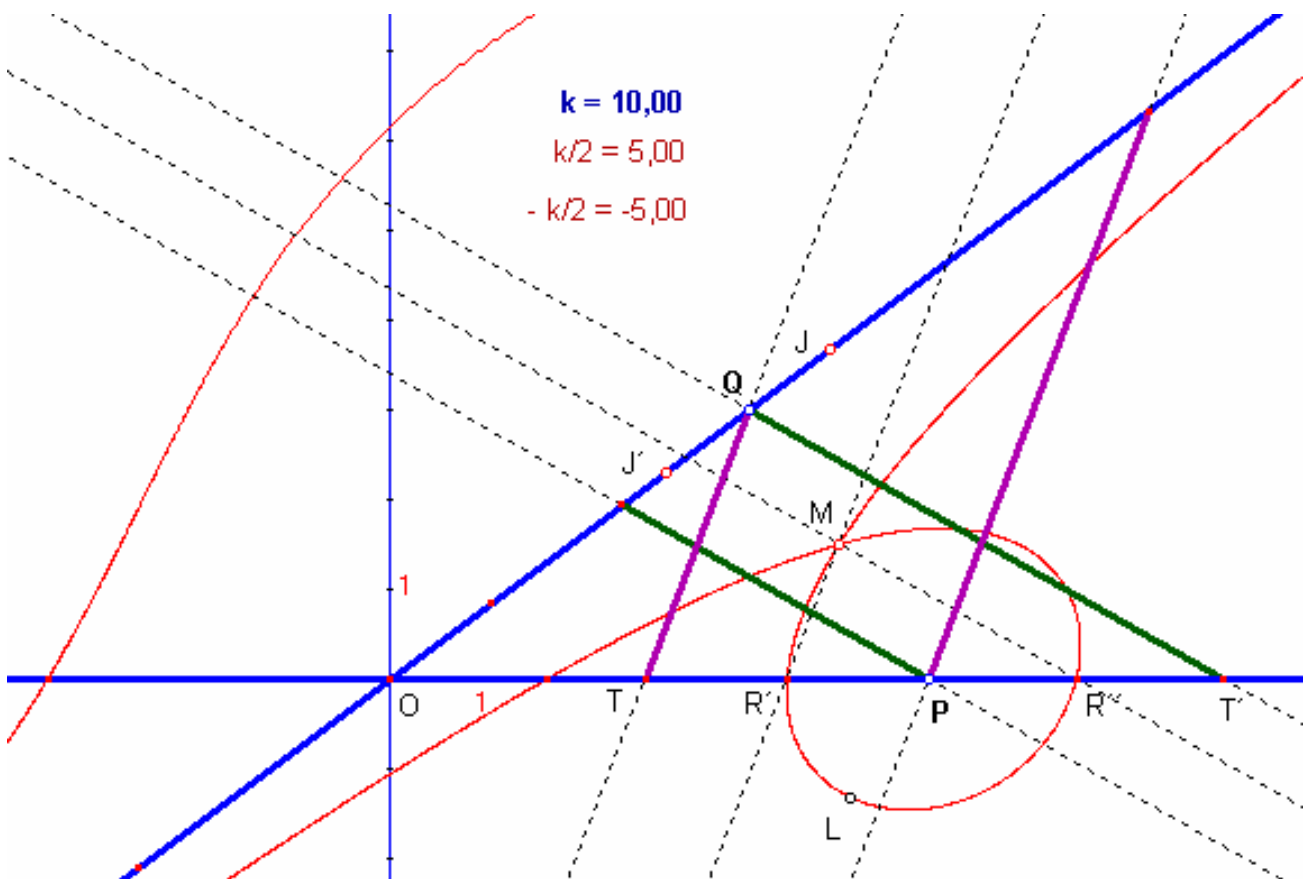
Haciendo centro en el punto A se traza la circunferencia de radio K que intersecta al eje OX en los puntos P y P' cuyas abcisas z satisfacen la ecuación:

$$(z - a)^2 + b^2 = k^2$$

Se comprueba que los segmentos intersecados por las soluciones PA y P'A entre las rectas dadas son de magnitud igual a k.

Finalizo el comentario con el problema al que ya me he referido al principio de este artículo:

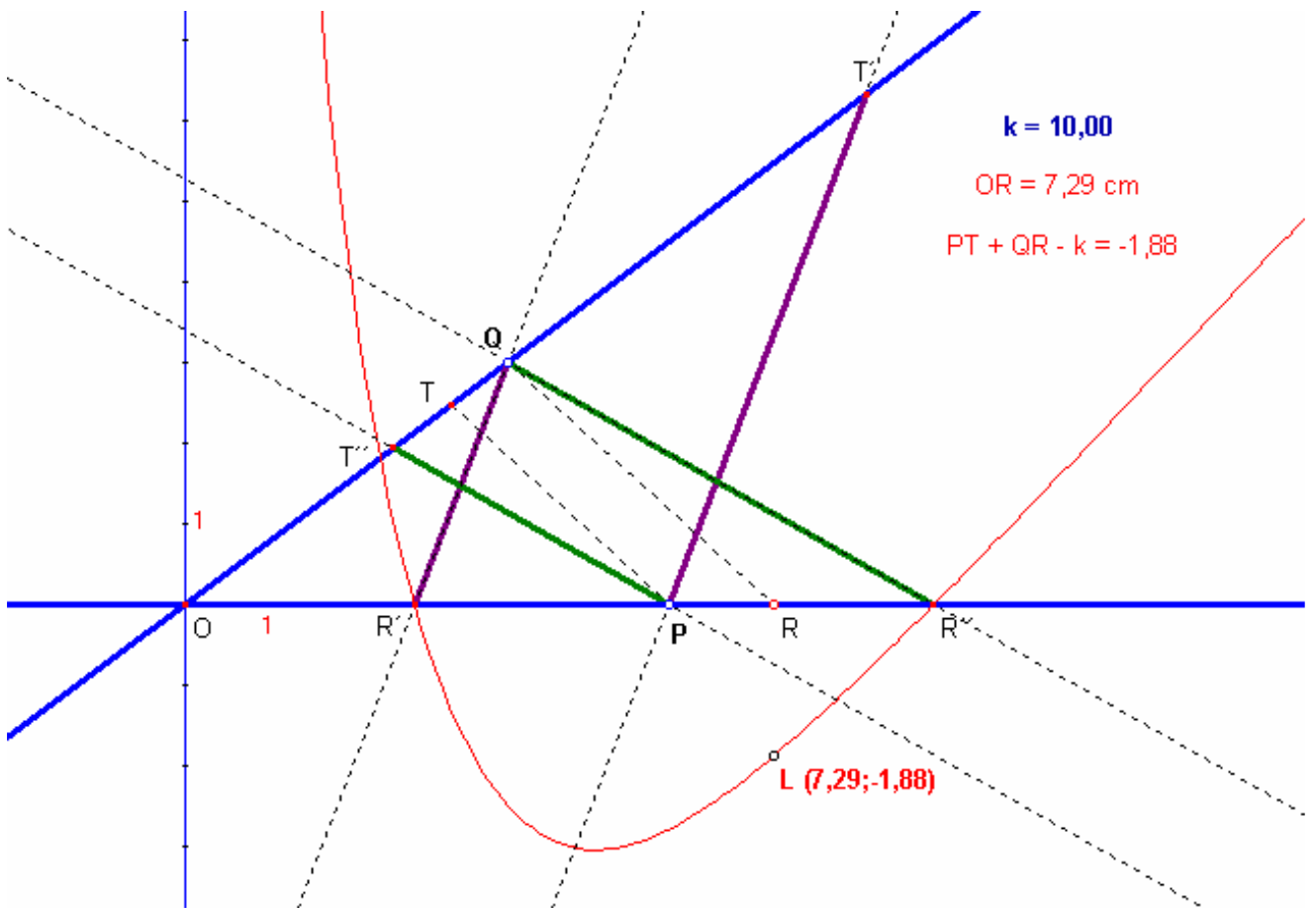
“Dadas dos rectas y un punto en cada una de ellas, trazar por éstos dos secantes paralelas tales, que la suma de los segmentos interceptados por las rectas sea igual a una magnitud conocida, k.”



Se toman como datos los puntos P y Q y las rectas OP y OQ.

Se construye el lugar geométrico correspondiente el cual intersectará a OX en los puntos R' y R'' (las otras dos intersecciones no son válidas, teniendo en cuenta la orientación de los segmentos, sería su diferencia igual a k en lugar de la suma). Las soluciones son las rectas paralelas a R'M por P y Q y las paralelas a R''M por P y Q. Se comprueba que la suma de las magnitudes de los segmentos interceptados por las rectas es igual a K.

Pero veamos otra manera más directa de solucionar el problema:



Se toman como datos los puntos P y Q y las rectas OP y OQ.

Se construye el lugar geométrico de los puntos L, cuyas coordenadas se indican, el cual intersectará a OX en los puntos R' y R''.

Las soluciones son las rectas QR' y su paralela por P así como la recta QR'' y su paralela por P.

Se comprueba que la suma de las magnitudes de los segmentos interceptados es igual a K.

Se adjuntan los problemas números 50, 51, 79, 80, 81 y 82 tomados de la colección de problemas resueltos de GEUP.

Ramón Álvarez Braun