

Algunas actividades con GEUP

Carmen Galván Fernández

Para tener éxito en geometría, ya sea para crear o simplemente para resolver problemas, se tiene que estar dispuesto a experimentar, dibujar y ensayar innumerables figuras, para probar esto o aquello.

Howard Eves (Estudio de las Geometrías)

Resumen

En este trabajo se desarrollan algunas actividades en las que se utiliza la geometría para ayudar a la comprensión del lenguaje gráfico y el algebraico. Durante el desarrollo de estas actividades en el aula, se intenta fomentar el interés por la observación, la formulación de conjeturas, la experimentación y la comprobación. El uso de GEUP, un programa de geometría dinámica, ha hecho posible que se pudiera experimentar fácilmente y que, en consecuencia, se pudiera avanzar en las investigaciones.

Introducción

Intentaremos desarrollar algunas actividades con las que se pretende mostrar:

- La conveniencia de utilizar, siempre que sea posible, la geometría como fuente de la que surgen infinidad de contenidos numéricos, algebraicos, funcionales... Con el apoyo de la realidad geométrica, visual, los diversos contenidos cobran más sentido y, a la vez, se repasan y consolidan propiedades y conceptos geométricos. En los siguientes ejemplos, la geometría será el punto de partida para, estudiando relaciones entre elementos variables de una figura, ayudar a comprender el lenguaje gráfico y el algebraico.
- La intención de practicar día a día, en el transcurso de las clases, el método científico, el método matemático: fomentar la experimentación, la observación, la formulación de conjeturas, la comprobación, la demostración general.
- La utilización de GEUP, un programa de matemáticas para Windows, interactivo, como herramienta que facilita al máximo la posibilidad de aplicación del método matemático y que, a la vez, supone un poderoso recurso de motivación.

El problema de la movida de los cuadrados

Cada año, en el momento de iniciar el estudio de la función polinómica de 2º grado, suelo proponer el siguiente problema. Los propios alumnos le pusieron el nombre: *El problema de la movida de los cuadrados*.

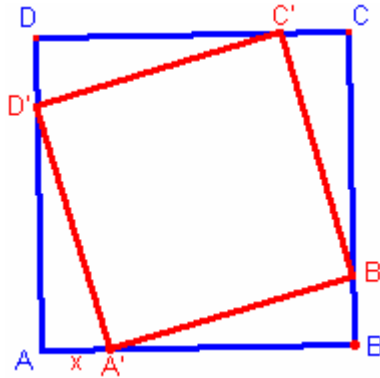
Éste es un ejercicio para realizar en clase, puesto que se trata de ir poco a poco haciendo aparecer consecutivamente los apartados, a medida que los alumnos van resolviendo.

- a) Observa que el área de los diferentes cuadrados $A'B'C'D'$ que se pueden inscribir en un cuadrado $ABCD$ depende de x ($x = AA'$. Si mueves el punto A' , cambia x).

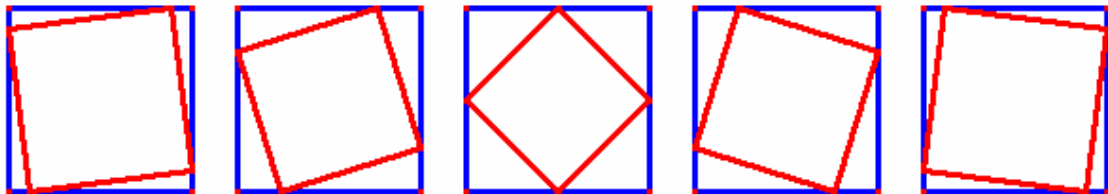
Para hacer la observación, dibuja varios casos de cuadrados inscritos en un cuadrado de lado $l = 6$, por ejemplo.

Dejaremos unos minutos para que los alumnos trabajen y continuamos:

- b) ¿Entre qué valores puede variar x ? ¿Cómo va cambiando el área de los distintos cuadrados a medida que aumenta x ? Describe con tus palabras la variación que observes.



Siempre hay algún alumno muy ordenado y sistemático al que se le ocurre dibujar la movida como si fuera una película de dibujos animados y esto, claro está, favorece enormemente la visualización...



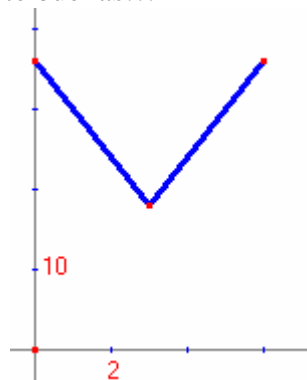
Si x aumenta...

Ahora, todos están dispuestos para describir lo observado.

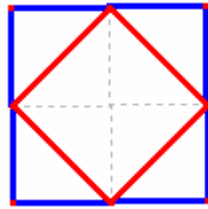
Continuamos:

- c) Imagina la gráfica de esta función ¿Te atreves a hacer un dibujo aproximado?

Las conjeturas suelen ser bastante buenas...



Es el momento de asegurar el valor de los puntos extremos (cuando $x = 0$ y cuando $x = 6$) y el valor mínimo de la función, el punto $(3, 18)$. La demostración visual del valor del área del cuadrado inscrito cuando $x = \text{lado} / 2$ es bien sencilla y siempre tendremos alumnos dispuestos a hacerla.



- d) Construye una tabla de valores en la que figuren valores entre 0 y 3 y entre 3 y 6 (ten en cuenta la simetría observada). Después, dibuja la gráfica con estos puntos. ¿Es parecida a la que imaginaste?

En este momento comienzan algunas dificultades y es posible que tengamos que ofrecer alguna ayuda (sólo alguna pista...) pero al fin aparecen dos caminos de resolución: algunos alumnos aplican el teorema de Pitágoras, otros prefieren restar al área del cuadrado grande los cuatro triángulos de las esquinas. Se construye la tabla, se dibuja la gráfica y se compara con lo previsto. ¡La variación no es lineal! Es la ocasión favorable para introducir la nueva función.

- e) ¿Cuál es la ley general que rige esta variación? Es decir, encuentra el valor del área y para cualquier valor de x .

Cuesta entender el uso de las letras para la generalización, pero al fin comprobamos que las dos formas de resolver el valor del área conducen a la misma ley, la función polinómica de 2 grado:

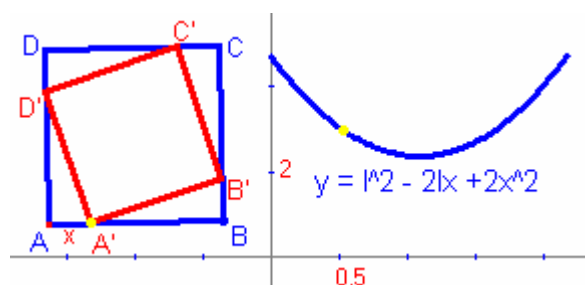
$$y = (6 - x)^2 + x^2 = 6^2 - 2x(6 - x) = 36 - 12x + 2x^2$$

Para cualquier cuadrado de lado l , el área de los cuadrados inscritos es:

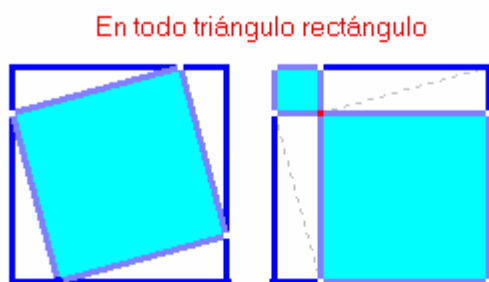
$$y = (l - x)^2 + x^2 = l^2 - 2x(l - x) = l^2 - 2xl + 2x^2$$

Valoramos el adelanto que supone obtener la ley general: ¡ya no tenemos que estar pensando cada caso concreto; con una sencilla operación numérica podemos obtener el valor del área en cada caso que nos interese!

Para concluir comparamos los tres lenguajes: el geométrico, el gráfico y el algebraico, que describen la misma variación desde puntos de vista diferentes. Los tres son necesarios y se complementan.



Resulta imposible resistir la tentación de mostrar una **demostración visual del teorema de Pitágoras**. ¡Vale la pena aprovechar la ocasión!



El cuadrado de la hipotenusa = Suma de los cuadrados de los catetos

Tendremos que ayudar a la comprensión visual, a saber mirar para comprender.

Hasta aquí nada nuevo. Sólo hacer notar que los distintos apartados de la actividad guardan un **esquema general de actuación** que podemos aplicar en nuestras clases diariamente:

- Observar
- Describir la observación
- Prever
- Actuar, resolver
- Analizar los resultados, comparar con lo previsto
- Generalizar, demostrar, si es posible.

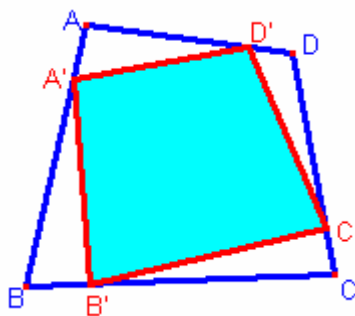
¿Qué ocurre si el problema se generaliza a cualquier cuadrilátero?

El problema será el siguiente:

En un cuadrilátero cualquiera ABCD inscribimos otro A'B'C'D', de forma que $AA'/AB = BB'/BC = CC'/CD = DD'/DA = r$. Tenemos que observar la variación del área del cuadrilátero inscrito en función de r o, mejor, estudiar la relación entre el área del cuadrilátero inscrito S' y el área del cuadrilátero exterior S al variar r. Es decir: estudiaremos la función $S'/S = f(r)$.

Este problema se podría titular “*La movida de los cuadriláteros*” y se puede proponer a los alumnos del mismo modo que la actividad anterior, paso a paso:

- a) Observa que el área de los diferentes cuadriláteros inscritos depende de r...



Igual que en el caso del cuadrado, esta primera observación es fácil:

Si r varía entre 0 y 1, el valor de S'/S va disminuyendo desde 1 hasta que alcanza el valor mínimo cuando $r = 0,5$ (¿Será en este punto el valor de S' la mitad de S como ocurría en el caso de los cuadrados?) y a partir de este punto va aumentando hasta llegar de nuevo a valer 1...A simple vista, poco más podremos lograr. ¿Cómo construir una tabla de valores? El cálculo de un solo caso particular se haría bastante difícil para alumnos de este nivel y tardaríamos demasiado en resolver el problema y de hallar la función general.

Recurrimos al apoyo de GEUP. ¡Haciendo una sola construcción podemos obtener y visualizar, a partir de ella, todos los casos particulares que queramos sin más que mover adecuadamente los elementos que nos interese! La experimentación se facilita extraordinariamente.

La construcción es sencilla:

Creamos un cuadrilátero ABCD, que podemos modificar si movemos cualquiera de sus vértices, con lo cual se logra la generalización del cuadrilátero. Sobre él creamos el segmento AB e insertamos en él un punto A', que podemos mover libremente a lo largo de todo el segmento. Medimos AA' y AB y el cociente entre sus valores podemos obtenerlo utilizando la calculadora incorporada y, arrastrando este número a la pantalla, podremos utilizarlo cuando sea preciso. Tenemos, así, el valor de r , que variará al mover el punto A' sobre el segmento AB.

Para obtener el punto B' debemos utilizar el botón "Punto desplazado según número": El punto B será desplazado en la dirección BC según el número correspondiente al producto de la medida de BC por r . De manera análoga obtenemos C' y D'. Podemos ya dibujar el cuadrilátero A'B'C'D'. Moviendo A' sobre AB ¡podemos observar la variación del cuadrilátero inscrito!

Podemos construir la gráfica de la función $S'/s = f(r)$: Con el fin de que sea posible observar simultáneamente la variación geométrica y su correspondiente gráfica, creamos, al lado de la figura construida, unos ejes de coordenadas. Utilizando la herramienta "Punto con coordenadas" creamos el punto P (abscisa = r , ordenada = S'/S). la herramienta "Lugar geométrico" permitirá obtener la gráfica que describe el punto P como consecuencia del movimiento del punto A'.

Observamos: *La curva obtenida parece ser una parábola...*

Efectivamente, se puede demostrar geométicamente que la curva responde a la ley

$$S'/S = 1 - 2r + 2r^2$$

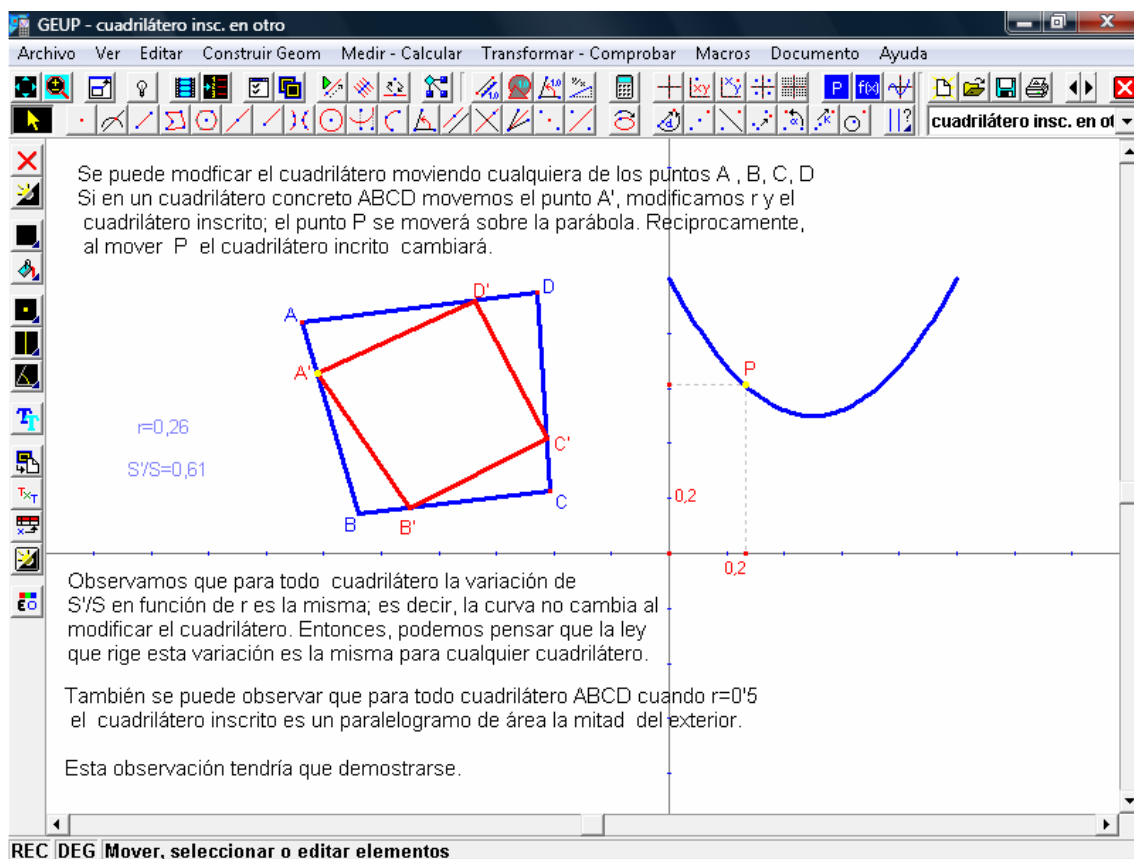
Pero, considerando que esta demostración no estaría al alcance de la mayoría de los alumnos de este nivel, preferimos orientar la búsqueda de esta ley general por un camino que, creemos, sería más adecuado. Se plantearía así:

“Se sabe que la ley es de la forma: $S'/S = a r^2 + b r + c$, hallar a , b y c utilizando tres puntos seguros de esta parábola”

El problema que se nos plantea ahora es: *¿Tenemos tres puntos seguros de esta función?*: está claro que dos de ellos están asegurados: los dos puntos extremos (cuando $r = 0$ y cuando $r = 1$). Necesitamos al menos un punto más...

Investiguemos con la ayuda de GEUP:

Con la construcción hecha podemos observar la movida de los cuadriláteros:

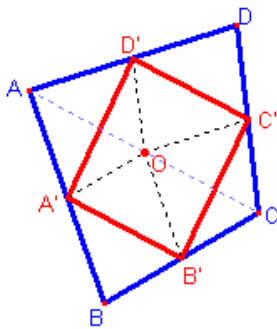


Por una parte, para un cuadrilátero concreto ABCD, al mover A' (estamos variando r) observamos cómo varía el cuadrilátero inscrito y cómo varían, a la vez, las coordenadas del punto P, recorriendo su gráfica. También, recíprocamente, si movemos el punto P, podemos observar cómo van variando en consecuencia, en la figura, el punto A' y el cuadrilátero inscrito.

Por otra, si modificamos el cuadrilátero ABCD, ¡observamos que la gráfica no varía! Es decir, las coordenadas del punto P son las mismas para cualquier cuadrilátero ABCD. ¡Parece ser que todos los cuadriláteros se comportan de la misma manera!

Esto nos hace suponer que, entonces, como ocurre en el caso de el cuadrado, cuando $r = 0,5$ el área del cuadrilátero inscrito es la mitad del área del cuadrilátero exterior. *¡Es una hipótesis que tendremos que demostrar!*, pero de ser cierta, el problema de hallar la ley general de variación estaría resuelto: ¡Debe ser la misma que la de la variación de los cuadrados, puesto que la parábola pasa por los mismos puntos!

Debemos encontrar la forma de asegurar que la vista no nos engaña. Tenemos que demostrar que para cualquier cuadrilátero, el área del cuadrilátero inscrito en el punto medio de sus lados es la mitad del área del primero. Esta demostración es sencilla. En la figura siguiente mostramos una posibilidad:



Uniendo los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera se obtiene un paralelogramo, cuya área es la mitad de la del cuadrilátero exterior.

A', B', C' y D' son los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$. Por A', B', C' y D' trazamos paralelas respectivamente a los lados BC, AB, AD y DC . Estas rectas se cortan en O , punto medio de la diagonal AC , como se puede demostrar por el teorema de Tales. Obteniéndose los paralelogramos $DD'OC'$ y $BB'OA'$ y los cuadriláteros $AA'OD'$ y $CC'OB'$ iguales entre sí y semejantes al $ABCD$ con razón $1/2$

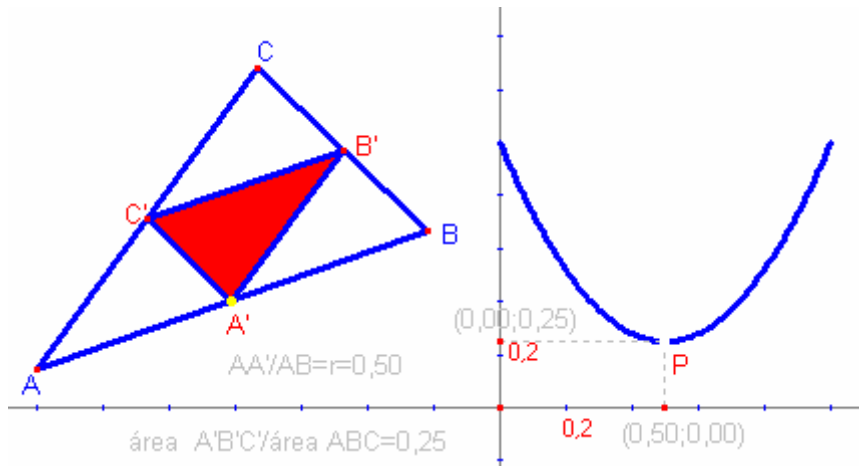
Ya estamos en condiciones de asegurar tres puntos de la parábola $y = S'/S = c + br + ar^2$ los puntos: $(0, 1)$; $(0,5, 0,5)$ que es el mínimo y el $(1, 1)$. Con ellos averiguaremos a, b y c , planteando y resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente. Obtenemos $S'/S = 1 - 2r + 2r^2$, que es, evidentemente, la misma ley que la que habíamos obtenido en el caso del cuadrado ($r = x/l$)

Podemos seguir investigando:

¿Qué ocurre en el caso de otros polígonos?

Estudiemos el problema similar en el triángulo, el pentágono el hexágono... No nos va a llevar demasiado tiempo, porque las construcciones respectivas las haremos fácilmente, de manera análoga a la del cuadrilátero. Después, sólo tendremos que observar, hacer conjeturas, demostrar si es posible...

“La movida de los triángulos”: en este caso, se observa, igual que ocurría con los cuadriláteros, que la gráfica no cambia si variamos el triángulo y que, para cualquier triángulo, el área del triángulo inscrito en el punto medio de sus lados es la cuarta parte del área del triángulo exterior. Esto último es fácil de demostrar. El problema de hallar la ley general de variación $S'/S = f(r)$ lo podemos resolver de manera algebraica, utilizando los tres puntos seguros que tenemos de su gráfica, o también por medio de recursos geométricos, porque en este caso es fácil. Sería interesante hacerlo en clase de las dos formas. Obtenemos: $S'/S = 1 - 3r + 3r^2$



¡Parece que todo va bien...! tanto en los triángulos como en los cuadriláteros la ley es fija, independiente del triángulo o del cuadrilátero y esto nos hace suponer que *podría ocurrir igual en los pentágonos, en los hexágonos...*

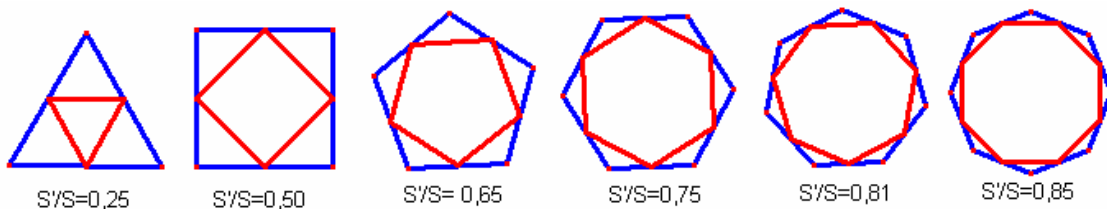
¡Pero no es así! , como se puede comprobar a través de las construcciones y observaciones realizadas con el programa:

En la “*movida de los pentágonos*” observamos que la curva varía al variar el pentágono, así que la ley depende de la forma del pentágono. *Parece ser que para cada pentágono (para todos los semejantes entre sí) habrá una ley de variación del área de los pentágonos inscritos.*

Lo mismo se observa en el caso de los hexágonos, de los heptágonos...

Como no podemos obtener una única ley para la movida de los polígonos en general, vamos a fijar nuestra atención en lo que ocurre en **el caso de los polígonos regulares**:

Podemos proponer como ejercicio, para cada polígono, el cálculo del área del polígono correspondiente inscrito cuando $r = 0,5$, con lo cual obtendremos la serie de valores de la relación S'/S para el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono regular, el hexágono regular...



$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\square^2}{4}, \frac{3}{4} \dots$ (\square = Número áureo = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;siempre presente en el pentágono regular) Serie que tiende, naturalmente, a 1 cuando el número de lados del polígono tiende a infinito.

El problema de encontrar la ley $S'/S = f(r)$ para cada polígono regular se podría resolver fácilmente suponiendo que son parábolas del tipo $S'/S = ar^2 + br + c$. Sin embargo, a los

alumnos interesados podríamos hacerles la propuesta de verificarlo a través de la demostración geométrica.

Conclusión

A lo largo del desarrollo de estos ejemplos hemos tenido la oportunidad de utilizar y repasar diversos contenidos de geometría, de números y de álgebra, de trigonometría de funciones, a la vez que, con la ayuda del programa GEUP, hemos podido realizar sin mucho esfuerzo una pequeña investigación en el aula. Se nos ha facilitado al máximo la posibilidad de construir, visualizar y observar el comportamiento de las figuras y de las funciones que estábamos estudiando, lo que ha permitido avanzar en la generalización.

Los alumnos acogen con entusiasmo el uso de estos programas y aprenden con facilidad a manejarlos. A la vez, aumenta su interés y el gusto por la asignatura porque el estudio resulta más atractivo.

Podemos aprovechar para la enseñanza las oportunidades que nos ofrecen estos nuevos recursos.